# DIKTAT KULIAH

# MES619201 MATEMATIKA TEKNIK 1

Jurusan Teknik Mesin


Disusun Oleh :

**Dr. Ir. Ni Ketut Caturwati, MT.**


**JURUSAN TEKNIK MESIN FAKULTAS TEKNIK**
**UNIVERSITAS SULTAN AGENG TIRTAYASA**
**TAHUN 2021**

# RENCANA PEMBELAJARAN SEMESTER (RPS)

# ( MES619201 MATEMATIKA TEKNIK 1 )

**Dosen: Dr. Ni Ketut Caturwati.**

**JURUSAN TEKNIK MESIN**
**FAKULTAS TEKNIK**
**UNIVERSITAS SULTAN AGENG TIRTAYASA**
**TAHUN 2021**

| | **RENCANA PEMBELAJARAN SEMESTER** | No : ............ |
|---|---|---|
| | | Revisi : Ke 0 |
| | **MES619201 MATEMATIKA TEKNIK 1** | Tanggal : Juli 2021 |
| | | Halaman: 9 |
| Dibuat Oleh:<br>Dr. Ni Ketut Caturwati, MT<br>NIP. 196706022001122001 | Diperiksa Oleh: | Disetujui Oleh:<br>Imron Rosyadi, ST.,MT<br>NIP. 197605042006041001 |
| Dosen | Dosen Pembina/Ketua Kelompok Keahlian | Ketua Jurusan |

## RENCANA PEMBELAJARAN SEMESTER

### 1. Identitas Matakuliah

Nama Program Studi : Teknik Mesin
Nama Matakuliah : **MATEMATIKA TEKNIK 1**
Kode Matakuliah : **MES619201**
Kelompok Matakuliah : Mata Kuliah Wajib Teknik Mesin
Bobot sks : 3 SKS
Jenjang : S1
Semester : 3 (Tiga)
Prasyarat : Kalkulus 1 ( TEK619101 ))
Status (wajib/ pilihan) : Wajib
Nama dan kode dosen : Dr.Ir. Ni Ketut Caturwati, MT.

**2. Deskripsi Matakuliah**

Matematika Teknik 1 adalah Mata Kuliah Wajib di Teknik Mesin dengan pokok – pokok bahasan meliputi Matrik, Permutasi, Determinan, Invers, Invers Kanan, Invers Kiri, Ekivalensi Baris, Ekivalensi Kolom, Kebebasan Linier, Ketergantungan Linier, Kombinasi Linier, Kanoniksasi, Persamaan Linier, Probabilitas Jawaban Persamaan Linier, Permasalahan Fisika (Wheat-stone Bridge), Transformasi Linier, Nilai Diri (Eigen Value), Vektor Diri, Vektor Diri, Persoalan Fisika (Resonansi Getaran), Null Space, Ortogonalisasi, Ortonormalisasi.

**3. Capaian Pembelajaran Program Studi**

- Kemampuan untuk mengaplikasikan pengetahuan matematika, sains dan teknik (*engineering*). (U1)
- Kemampuan untuk merancang dan menjalankan eksperimen serta menganalisis dan menginterpretasikan data (U2)
- Kemampuan untuk merancang suatu sistem, komponen, atau proses untuk memenuhi suatu kebutuhan (U3)
- Kemampuan untuk berperan serta pada suatu tim yang bersifat multi-disiplin (U4)
- Kemampuan untuk mengidentifikasi, memformulasi, dan menyelesaikan masalah-masalah Teknik (U5)
- Pemahaman tentang tanggung jawab profesional dan etika (U6)
- Kemampuan untuk berkomunikasi secara efektif (U7)
- Cakupan pengetahuan cukup luas untuk dapat memahami pengaruh tindakan teknis yang diambilnya terhadap masyarakat dan dunia global (U8)
- Kesadaran akan pentingnya belajar seumur hidup dan kemampuan untuk menjalankannya (U9)
- Pengetahuan tentang isu-isu kontemporer (U10)
- Kemampuan untuk memanfaatkan teknik-teknik, keahlian-keahlian, dan peralatan teknik modern yang diperlukan untuk pelaksanaan tugas-tugas profesionalnya (U11)
- Mampu berwirausaha dalam bidang teknik Mesin (P1)
- Mampu menggunakan simulasi proses teknik Mesin (P2)
- Mampu menggunakan bahasa Inggris dengan baik (P3)
- Memiliki Keimanan dan Ketaqwaan yang baik dengan dukungan karakter kuat untuk jujur,bertanggung jawab, integritas dan etos kerja yang baik (L1)
- Mampu bersosialisasi  dan bermasyarakat dengan baik (L2)
- Memiliki jiwa kepimpinan untuk penyelesaian permasalahan dan mengarahkan dalam suatu tim kerja (L3)

**4. Capaian Pembelajaran Matakuliah**

- Kemampuan untuk mengaplikasikan pengetahuan matematika, sains dan teknik (*engineering*). (U1)
- Kemampuan untuk merancang suatu sistem, komponen, atau proses untuk memenuhi suatu kebutuhan (U3)

- Kemampuan untuk mengidentifikasi, memformulasi, dan menyelesaikan masalah-masalah Teknik (U5)

1. **Deskripsi Rencana Pembelajaran**

| Pert. | Indikator Capaian Pembelajatan Matakuliah | Bahan Kajian | Bentuk Pembelajaran | Waktu | Tugas dan Penilaian | Rujukan |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | Mahasiswa memahami kontrak perkuliahan dan aturan main dalam perkuliahan | Out line Materi kuliah Matematika Teknik 1 | • Penyamaan persepsi aturan perkuliahan, konsep, definisi dan standar penilaian<br>• Diskusi tentang aplikasi matematika teknik di sekitar kehidupan ini<br>• Penjelasan garis besar materi Matematika teknik 1.<br>• Pemahaman tentang Matrik.<br>• Jenis2 matrik : baris, kolom, persegi, matriks identitas, ordo matriks , upper triangular, lower triangular. | 150 Menit | Mahasiswa diminta untuk mereview perkuliahan di rumah | • Frank Ayres Jr., Matrices, Schaum Outline Series.<br>• Linear Algebra, Schaum Outline Series<br>• Aljabar Linier, berbagai pengarang & penerbitan<br>• Bahan Kuliah bisadi-down load dari Spada<br>• Yang minta akan dikirimi bahan kuliah dan kisi-kisi soal quiz lewat Email serta cara-cara penilaian tiap quiz yang tergantung pada derajat kesulitan tahapan |
| **2** | Mahasiswa memahami pengoperasiam matriks dengan konstanta maupun matriks dengan matriks. | Operasi matriks: Penjumlahan-pengurangan , perkalian matriks dan determinan matriks. | • Diskusi mengenai ordo matriks.<br>• Perkalian matriks dengan skalar,<br>• Pembentukan matriks transpose.<br>• Syarat dua buah matriks dapat dijumlahkan dan di kalikan.<br>• Penentuan nilai determinan suatu matriks persegi. | 150 menit | Mahasiswa diminta untuk mereview perkuliahan di rumah | |
| **3** | Mahsiswa mampu menyusun elemen2 suatu matriks, membentuk matriks transpose, mengerti syarat perkalian dua matriks , | Operasi matriks: Penjumlahan-pengurangan , perkalian matriks dan determinan matriks. | • Pemberian Tugas | 1 hari | Mahasiswa diminta mengerjakan tugas yang diberikan dan upload jawaban ke Google classroom. | |

| Pert. | Indikator Capaian Pembelajatan Matakuliah | Bahan Kajian | Bentuk Pembelajaran | Waktu | Tugas dan Penilaian | Rujukan |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | penentuan determinan matriks persegi. | | | | | |
| **4** | Mahsiswa mampu menentukan determinan matriks besar dengan ordo nxn. | Menentukan nilai determinan matriks nxn melalui pembentukan matriks upper triangular dan lower triangular. | Diskusi, tutorial dan pelatihan. | 150 menit | Mahasiswa diminta untuk mereview perkuliahan di rumah | |
| **5** | Mahasiswa mampu menentukan invers dari suatu matriks 2x2 dan 3x3 | Menentukan nilai matriks melalui penentuan : determinan matriks, co-factor matriks, adjoin matriks dan invers matriks | Tutorial , diskusi dan latihan | 150 menit | Mahasiswa diminta untuk mereview perkuliahan di rumah | |
| **6** | Mahasiswa mampu menentukan invers dari suatu matriks berukuran besar nxn | Menentukan minvers matriks nxn dengan menyandingkan matriks dengan matriks identitasnya. Kemudian lakukan operasi baris eliminasi. | • Tutorial , diskusi dan latihan | 150 menit | Mahasiswa diminta untuk mereview perkuliahan di rumah | |
| **7** | ***UJIAN TENGAH SEMESTER*** | | | | | |
| **8** | Mahasiswa memahami cara pemecahan masalah masalah yang diberikan | Penyelesaian masalah UTS : Operasi matriks, determinan dan | Tutorial dan diskusi | 150 menit | Mahasiswa diminta untuk mereview perkuliahan di rumah | |

| Pert. | Indikator Capaian Pembelajatan Matakuliah | Bahan Kajian | Bentuk Pembelajaran | Waktu | Tugas dan Penilaian | Rujukan |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | invers suatu matriks | | | | |
| **9** | Mahasiswa mampu menyelesaikan beberapa persamaan linier dengan Operasi Baris Eliminasi | Membentuk augmented matriks dari persamaan 2 linier yang diberikan dan memecahkannya melalui OBE | Diskusi, tutorial dan pelatihan. | 150 menit | Mahasiswa diminta untuk mereview perkuliahan di rumah | |
| **10** | Mahasiswa mampu menyelesaikan beberapa persamaan linier dengan menggunakan invers matriks dan Cramer’s Rule | Penggunaan invers matriks dan Cramer’s Rule untuk menentukan n variable pada n persamaan bebas linier. | Diskusi, tutorial dan pelatihan. | 150 menit | Mahasiswa diminta untuk mereview perkuliahan di rumah | • |
| **11** | Mahasiswa mampu menyelesaikan n buah persamaan linier dengan n variable yang tidak diketahui. | Latihan penyelesaian soal | Quiz | 150 menit | Quiz dinilai melalui google classroom. | • |
| **12** | Mahasiswa mampu menyelesaikan n buah persamaan linier dengan n variable yang tidak diketahui | Penyelesaian masalah Quiz : Penyelesaian persamaan linier | Responsi | 150 menit | Mahasiswa menyimak dan mereview materi di rumah. | • |
| **13** | Mahasiswa mampu menentukan kombinasi linier suatu vector dari beberapa vector lainnya. | Penentuan vector hasil kombinasi linier beberapa vector. Menentukan konstanta pengali vektor2 untuk | Diskusi, tutorial dan pelatihan. | 150 menit | Mahasiswa diminta untuk mereview perkuliahan di rumah | • |

| Pert. | Indikator Capaian Pembelajatan Matakuliah | Bahan Kajian | Bentuk Pembelajaran | Waktu | Tugas dan Penilaian | Rujukan |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | suatu vector yang diberikan. | | | | |
| **14.** | Mahasiswa mengenal tentang Transformasi matriks. Mampu menentukan nilai eigen matriks dan vector eigen matriks tersebut. | Transformasi matriks yang merupakan perkalian konstanta matriks yang dinyatakan sebagai nilai eigen matriks tersebut. | Diskusi, tutorial dan pelatihan. | 150 menit | Mahasiswa diminta untuk mereview perkuliahan di rumah | • |
| **15** | Responsi | Seluruk materi diatas | Diskusi, tutorial dan pelatihan. | 150 menit | Mahasiswa menyimak dan mereview materi di rumah | • |
| **16** | ***UJIAN AKHIR SEMESTER*** | | | | | |

**Daftar Rujukan**


- Moran and Shapiro,"Fundamentals of Eng. Thermodynamics ", Mc-Graw-Hill, 2015 l
- Yunus Cengel, "Thermodynamics: An Eng. Approach", Mc-Graw-Hill, 2014


2. **Lampiran**

Skala Penilaian:

**A = 4 = 80,00 - 100**
**B = 3 = 68,00 - 79,99**
**C = 2 = 56,00 - 67,99**
**D = 1 = 45,00 – 55,99**
**E = 0 = Kurang dari 45**
**T = Belum Memenuhi Seluruh Komponen Penilaian. Batas Waktu Memenuhi 2 Minggu stlh UAS**
**K = Tidak Mengikuti 3 Kali Tatap Muka Perkuliahan**

Persentase Poin Penilaian:

| NO | NIM | NAMA | NILAI | | | | | ANGKA | HURUF |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | QUIZ 10 % | Kehadiran 10% | UTS + 30% | Tugas 10% | UAS 40% | MUTU | MUTU |
| | | | | | | | | | |

# Matematika teknik 1
# materi 1

Semester Antara 2021

Oleh : Ni Ketut Caturwati

## Materi Kuliah

- Matriks dan jenis matriks, Ordo matriks, Operasi Matriks ; perkalian scalar, perkalian matriks dengan matriks, Permutasi, Determinan matriks 2x2 hingga matriks n x n, Invers matrik, penyelesaian persamaan2 linier, Persamaan2 linier bebas ; persamaan linier tak bebas

# Kriteria Penilaian :

1. Absensi 10 %
2. Tugas 2 maksimum 20 %
3. Quiz 10 %
4. UTS 30 %
5. UAS 30 %

Definisi matrix :

susunan bilangan, variable atau fungsi yang disusun secara baris atau kolom atau keduanya.

Ordo matriks (nxm): merupakan ukuran dari matriks yang menyatakan jumlah baris (n) dan kolom (m)

Misal matriks A dengan ordo 2x3

A = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$ = $[A_{23}]$

- Matriks B : ordo 1 x4

$$B = [2 \quad 4 \quad 6 \quad 3]$$

Matrik C : ordo 3 x 1

$$C = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Matriks D : ordo 3x4

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

# Jenis matriks

a. Matriks baris ; ordo 1 x m

contoh :

A = $[1 \quad 3 \quad 4]$ ordo 1x3 B= $[2 \quad 6]$ ordo 1x2

b. Matriks kolom ; ordo nx1

contoh :

C = $\begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$ ordo 3x1

c. Matriks persegi ; ordo n x n

Contoh :

D = $\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{bmatrix}$

d. Matriks identitas : matriks persegi dengan nilai 1 pada elemen diagonalnya sedang elemen lain bernilai 0

contoh :

E = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ G = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

e. Transpose matriks : merupakan perubahan ordo matriks dari nxm menjadi mxn

contoh :

1. A = $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ $A^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

ordo 1x3 ordo 3x1

2. B = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ $B^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$

ordo 3x2 Ordo 2x3

f. Upper triangular Matriks :

C = $\begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

g. Lower Triangular Matriks :

D = $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

# Matematika teknik 1
# Materi 2

Semester Antara 2021

Oleh : Ni Ketut Caturwati

## a. Penjumlahan atau Pengurangan :

Note : Hanya dapat dilakukan pada matriks dengan ordo yang sama

$$A - B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & a_{13} - b_{13} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & a_{23} - b_{23} \\ a_{31} - b_{31} & a_{32} - b_{32} & a_{33} - b_{33} \end{bmatrix}$$

Contoh :

1. $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 5 \\ 7 & 10 & 4 \end{bmatrix}$

2. $[6 \quad 4] - [2 \quad 1] = [4 \quad 3]$

## b. Perkalian matriks dengan skalar

Menghasilkan matriks dengan ordo yang sama, namun setiap elemennya dikalikan dengan satuan tersebut.

cA = $[cA_{mn}]$

Contoh 1.

$$2 \times \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 8 & -4 \end{bmatrix}$$

- Contoh 2.

  matriks C dengan elemen :

  $c_{11} = 2$ ; $c_{12} = 4$; $c_{13} = 3$; $c_{21} = 4$; $c_{22} = 2$ ; $c_{23} = 1$

  Tentukan nilai dari : 4 C

  Jawab :

  Matriks C = $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

  4C = $4 \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 16 & 12 \\ 16 & 8 & 4 \end{bmatrix}$

## c. Perkalian matriks dengan matriks

Hanya dapat dilakukan pada kolom matriks pertama sama dengan baris matriks kedua.

$[A_{23}]x[B_{31}] = [C_{21}]$ jika dibalik BxA tidak boleh

Contoh 1 :

1. [ordo 2x2 ] x [ordo 2x 1] = [ordo 2x1]

$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ x $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} (2x2) + (1x3) \\ (4x2) + (-2x3) \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$

Contoh 2.

A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ B = $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

AxB = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$x$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} 1+2+4 \\ 0+1+4 \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix}$

$A^T xB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$x$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ Tidak bisa dilakukan !!

Contoh 3 :

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \text{ x } \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2x1) + (0x2) & (2x3) + (0x4) \\ (3x1) + (4x2) & (3x3) + (4x4) \\ (1x1) + (6x2) & (1x2) + (6x4) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 11 & 25 \\ 13 & 26 \end{bmatrix}$$

# Determinan matriks A = det A=$|A|$

- Merupakan bilangan scalar yang menyatakan fungsi elemen2 dari suatu matriks persegi.

a. <u>Determinan matriks 2x2</u>

det A = det $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ = a.d – b.c

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

Contoh :

B = $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

det B = $|B|$ = 8 – (-3) = 11

b. Determinan matriks 3 x 3

cara 1 :

det B = $|B|$ = $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ = a$\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}$ - b$\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}$ + c$\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$

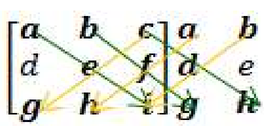
Contoh : Tentukan nilai determinan dari matriks B = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

det B = 1$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ = 1(3-0)-2(2-2)+3(0-3)

$|B|$ = -6

Atau dengan cara 2 dikenal dengan Leibniz formula :

$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ =



= aei + bfg + cdh – bdi – afh – ceg

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{matrix} = 1.3.1 + 2.2.1 + 3.2.0 \ - (3.3.1 + 1.2.0 + 2.2.1$$

= 7 – 13 = - 6

c. Determinan matriks 4 x 4 dapat menggunakan metode Sarrus

$$A1 = \begin{array}{cccccccc} + & - & + & - & - & + & - & + \\ \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} a & b & c & d & a & b & c & d \\ e & f & g & h & e & f & g & h \\ i & j & k & l & i & j & k & l \\ m & n & o & p & m & n & o & p \end{array}\right]$$

Contoh :

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 3 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

= 8 -3+0-2-16+6-0+1 = -6

# Matematika teknik 1
# Tugas 1

Semester Antara 2021

Oleh : Ni Ketut Caturwati

Soal 1.

Matriks A merupakan matriks ber ordo 3x4 dengan elemen2 sebagai berikut :

- $a_{11} = 2$ $a_{14} = 4$ $a_{23} = 3$ $a_{32} = 2$
- $a_{12} = 3$ $a_{21}$ =1 $a_{24}$ =-1 $a_{33}$ =0
- $a_{13}$ =1 $a_{22}$ =2 $a_{31} = 4$ $a_{34} = -3$

a. Susunlah matriks tersebut sebagai Matriks A.
b. Tentukan matriks Transpose- nya

## Soal 2.

Diketahui matriks2 berikut :

A = $\begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ B = $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ dan C = $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$

Tentukan :

a. Matriks M = A x $B^T$
b. Matriks N = B x C
c. Matriks O = $C^T xA$

## Soal 3.

- Tentukan nilai determinan dari matriks berikut :

a. A = $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

b. B = $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$

c. C = $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

# Soal 4.

Kerjakan soal berikut :

a. Matriks A =

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 3 | 3 | 1 | | 3 | 5 | 2 | 4 | |
| 2 | 2 | 1 | 0 | + | 1 | 0 | 3 | 2 | = |
| 0 | 5 | 2 | 3 | | 4 | 2 | 1 | 5 | |
| 5 | 1 | 3 | 1 | | 2 | 3 | 7 | -3 | |

b. Matriks B = 2 x matriks A

# Matematika teknik 1

## Determinant Matriks besar (nxn)

Semester Antara 2021

Oleh : Ni Ketut Caturwati

## Upper Triangular Matriks

Contoh

1. A = $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 9 \\ 0 & 3 & 8 \\ 0 & o & 5 \end{vmatrix}$

   Nilai Determinantnya : det A = 2x3x5 = 30

2. B = $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 7 & 8 \\ 0 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

Nilai Determinan matriks B = 3x5x4x2 = 120

Jadi Untuk Matriks Upper Triangular maka nilai determinan sama dengan perkalian elemen diagonalnya.

# Lower Triangular Matriks

Contoh :

1. Matriks B = $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}$ Determinan B = 1x3 = 3

2. Matriks C = $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & 0 \\ 8 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ Determinan C = 2x4x5 = 40

Jadi untuk lower Trianguler Matriks maka nilai determinannya sama dengan hasil perkalian elemen2 diagonalnya.

# Penyelesaian determinan matriks besar

- Dapat dilakukan dengan operasi eliminasi gausian terhadap matriks agar terbentuk upper.lower triangular matriks.

Contoh eliminasi gauss pada matriks :

1. A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Step 1. baris ke 2 dikurangi 2x baris pertama $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Baris ke 3 dikurangi 1 x baris pertama $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$

Step 2. baris ke 3 dikurangi 2x baris kedua

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Sehingga determinan Matriks A = 1x(-1) x6 = -6

Membentuk lower Triangular Matriks :

A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

lakukan eliminasi gaus dengan menetapkan $a_{33}$ sebagai basic nya.

Step 1. Buat $a_{23}$ $dan$ $a_{13} = 0$ baris 2 dikurangi 2 x baris ke tiga

*baris pertama dikurangi 3 x baris ketiga*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

*Step 2 : buat* $a_{12} = 0$ *dengan mengurangkan baris pertama 2/3 x baris ke dua*

$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ det A = (-2)x3x1 = -6

# Untuk Matriks 4x4 lihat di file excel

- Matriks A =

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 0 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | 2 |
| 0 | 1 | 2 | 1 |
| 1 | 2 | 2 | 1 |

Kurangi baris 1 dengan baris 4
Kurangi baris 2 dengan 2 x baris 4
Kurangi baris 3 dengan baris 4

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | -2 | 0 |
| -1 | -2 | -3 | 0 |
| -1 | -1 | 0 | 0 |
| 1 | 2 | 2 | 1 |

# Matematika teknik 1
# Invers Matriks

Semester Antara 2021

Oleh : Ni Ketut Caturwati

## Invers Matrik A = $A^{-1}$

- Merupakan matriks kebalikan dimana berlaku :

  $$A.A^{-1} = A^{-1}.A = I$$

- I merupakan matriks identitas yaitu nilai elemen diagonal = 1 dan elemen lainnya = 0
- Matriks yang memiliki invers hanya matriks persegi dengan ordo nxn dan nilai determinan $\neq 0$
- Untuk matriks persegi yang nilai determinan = 0 maka matriks tersebut tidak memiliki invers matriks dan dikenal dengan matriks Singular. Persamaan2 yang mendasarinya tidak bebas linier.

# Invers Matriks 2x2

- $A^{-1} = \frac{adj\ A}{\det A}$
- A = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$
- det A = ad – bc
- Adj A = $\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

Adjoint matriks.

# Contoh invers matriks 2x2

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Det A = 2*4 – 1*(-2) = 8 +2 = 10

Adj A = $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

Sehingga Invers matriks A adalah :

$$A^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}}{10} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 \\ -0.1 & 0.2 \end{bmatrix}$$

# Pembuktian

- $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ $\qquad$ $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 \\ -0.1 & 0.2 \end{bmatrix}$

- <u>Bukti 1</u>.

- $AA^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \text{x} \begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 \\ -0.1 & 0.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2)(0.4) + (-2)(-0.1) & (2)(0.2) + (-2)(0.2) \\ (1)(0.4) + (4)(-0.1) & (1)(0.2) + (4)(0.2) \end{bmatrix}$

- $AA^{-1} = \begin{bmatrix} 0.8 + 0.2 & 0.4 - 0.4 \\ 0.4 - 0.4 & 0.2 + 0.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ terbukti.

<u>Bukti 2</u>

$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ $\qquad$ $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 \\ -0.1 & 0.2 \end{bmatrix}$

$A^{-1}A = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 \\ -0.1 & 0.2 \end{bmatrix} \text{x} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (0.4)(2) + (0.2)(1) & (0.4)(-2) + (0.2)(4) \\ (-0.1)(2) + (0.2(1) & (-0.1)(-2) + (0.2)(4) \end{bmatrix}$

$A^{-1}A = \begin{bmatrix} 0.8 + 0.2 & -0.8 + 0.8 \\ -0.2 + 0.2 & 0.2 + 0.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

# Matriks 3x3 dan nxn

Matriks A = $\begin{bmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} \boxed{c11} & c12 & \boxed{c13} \\ c21 & \boxed{c22} & c23 \\ \boxed{c31} & c32 & \boxed{c33} \end{bmatrix}$$

Matriks co-factor A = C = $\begin{bmatrix} c11 & c12 & c13 \\ c21 & c22 & c23 \\ c31 & c32 & c33 \end{bmatrix}$ nilai c ditentukan dari determinan matriks 2x2 diluar kolom dan barismatriks A. dengan sign +,-,+ dst menurut urutannya , kotak biru +, lainnya -

Misal c11 = det $\begin{bmatrix} a22 & a23 \\ a32 & a33 \end{bmatrix}$ c12 = - det$\begin{bmatrix} a21 & a23 \\ a31 & a33 \end{bmatrix}$ dst

<u>Adjoint Matriks = Transpose Matriks Co Factornya.</u>

co-factor A = C = $\begin{bmatrix} c11 & c12 & c13 \\ c21 & c22 & c23 \\ c31 & c32 & c33 \end{bmatrix}$

Adj A = $\begin{bmatrix} c11 & c21 & c31 \\ c12 & c22 & c32 \\ c13 & c23 & c33 \end{bmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{adj\ A}{\det A}$$

# Contoh invers matriks 3x3

Diketahui matriks B = $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

Step 1

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | -1 | 2 | | 1 | -1 | 2 | | 1.0 | -1.0 | 2.0 |
| 2 | 1 | 3 | | 0 | 3 | -1 | | 0.0 | 3.0 | -1.0 |
| -1 | 2 | 2 | | 0 | 1 | 4 | | 0.0 | 0.0 | 4.3 |

Determinan matriks B = (1)(3)(4) = 12 pembulatan

Step 2 mencari matriks co-factor B = C

B = $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

$$c11 = (1)(2) - (2)(3) = -4$$
$$c22 = (1)(2) - (-1)(2) = 4$$
$$c33 = (1)(1) - (2)(-1) = 3$$

C = $\begin{bmatrix} -4 & -7 & 5 \\ 6 & 4 & -1 \\ -5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

Step 3 Adjoint matriks B : $\begin{bmatrix} -4 & 6 & -5 \\ -7 & 4 & 1 \\ 5 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

- Step 4. menentukan Invers matriks B
- $B^{-1} = \frac{adj\ B}{\det B} = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} -4 & 6 & -5 \\ -7 & 4 & 1 \\ 5 & -1 & 3 \end{bmatrix} =$

| | | |
|---|---|---|
| -0.3 | 0.5 | -0.4 |
| -0.6 | 0.33 | 0.08 |
| 0.42 | -0.1 | 0.25 |

$B^{-1}.B =$

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -0.3 | 0.5 | -0.4 | | 1 | -1 | 2 | | | 1.08 | 0 | 0 |
| -0.6 | 0.33 | 0.08 | | 2 | 1 | 3 | | = | 0 | 1.08 | 0 |
| 0.42 | -0.1 | 0.25 | | -1 | 2 | 2 | | | 0 | 0 | 1.08 |

# Matematika Teknik 1.
## Invers Matriks dengan Operasi Baris Elementer

Semester Antara 2021

**Ni Ketut Caturwati**

## Operasi Baris Elementer ≈ Eliminasi Gauss –Jordan

Menentukan Invers Matriks A :

1. Dengan menyandingkan matriks A terhadap matrik I
2. Lakukan operasi baris elementer sedemikian hingga :

$$[A \mid I] \rightarrow [I|A^{-1}]$$

# Invers matriks 2x2 (OBE)

Tentukan invers dari matriks :

B = $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$ cek : det B = (2)(4)-(4)(-3) = 15 berarti non singular.

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2.0 | -3.0 | 1.0 | 0.0 | b 1 : 2 | 1.0 | -1.5 | 0.5 | 0.0 | | 1 | -2 | 0.5 | 0 |
| 4.0 | 4.0 | 0.0 | 1.0 | | 4.0 | 4.0 | 0.0 | 1.0 | b2-4xb1 | 0 | 10 | -2 | 1 |
| | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | |
| 1.0 | -1.5 | 0.5 | 0.0 | | 1.0 | -1.5 | 0.5 | 0.0 | b1+1.5*b2 | 1.0 | 0.0 | 0.2 | 0.15 |
| 0.0 | 10.0 | -2.0 | 1.0 | b 2 : 10 | 0.0 | 1.0 | -0.2 | 0.1 | | 0.0 | 1.0 | -0.2 | 0.1 |

Jadi B = $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$ maka $B^{-1} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}$

Bukti : $BB^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.2 & 0.15 \\ -0.2 & 0.1 \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

# Invers Matriks 3 x 3 (OBE)

Cari invers matriks C berikut :

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 1 | 0 | 0 | | 1 | 2 | 3 | 1 | 0 | 0 |
| 2 | 5 | 3 | 0 | 1 | 0 | b2-2*b1 | 0 | 1 | -3 | -2 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 8 | 0 | 0 | 1 | b3-b1 | 0 | -2 | 5 | -1 | 0 | 1 |
| | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 2 | 3 | 1 | 0 | 0 | | 1 | 2 | 3 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | -3 | -2 | 1 | 0 | | 0 | 1 | -3 | -2 | 1 | 0 |
| 0 | -2 | 5 | -1 | 0 | 1 | b3 + 2*b2 | 0 | 0 | -1 | -5 | 2 | 1 |

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 1 | 0 | 0 | | 1 | 2 | 3 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | -3 | -2 | 1 | 0 | | 0 | 1 | -3 | -2 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | -1 | -5 | 2 | 1 | b1*(-1) | 0 | 0 | 1 | 5 | -2 | -1 |
| | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 2 | 3 | 1 | 0 | 0 | b1-3*b3 | 1 | 2 | 0 | -14 | 6 | 3 |
| 0 | 1 | -3 | -2 | 1 | 0 | b2+3*b3 | 0 | 1 | 0 | 13 | -5 | -3 |
| 0 | 0 | 1 | 5 | -2 | -1 | | 0 | 0 | 1 | 5 | -2 | -1 |
| | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 2 | 0 | -14 | 6 | 3 | b1-2*b2 | 1 | 0 | 0 | -40 | 16 | 9 |
| 0 | 1 | 0 | 13 | -5 | -3 | | 0 | 1 | 0 | 13 | -5 | -3 |
| 0 | 0 | 1 | 5 | -2 | -1 | | 0 | 0 | 1 | 5 | -2 | -1 |

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \qquad C^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

## Contoh matriks singular

Matriks $D = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 6 | 4 | 1 | 0 | 0 | | 1 | 6 | 4 | 1 | 0 | 0 |
| 2 | 4 | -1 | 0 | 1 | 0 | b2-2b1 | 0 | -8 | -9 | -2 | 1 | 0 |
| -1 | 2 | 5 | 0 | 0 | 1 | b3+b1 | 0 | 8 | 9 | 1 | 0 | 1 |
| | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 6 | 4 | 1 | 0 | 0 | | 1 | 6 | 4 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | -8 | -9 | -2 | 1 | 0 | (-)b2/8 | 0 | 1 | 1.125 | 0.25 | -0.13 | 0 |
| 0 | 8 | 9 | 1 | 0 | 1 | | 0 | 8 | 9 | 1 | 0 | 1 |
| | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 6 | 4 | 1 | 0 | 0 | | 1 | 6 | 4 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1.125 | 0.25 | -0.13 | 0 | | 0 | 1 | 1.125 | 0.25 | -0.13 | 0 |
| 0 | 8 | 9 | 1 | 0 | 1 | b3-8*b2 | 0 | 0 | 0 | -1 | 1 | 1 |

## Invers Matriks Diagonal

Matriks diagonal

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a1 | 0 | 0 | 0 | 0 | | 1/a1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | a2 | 0 | 0 | 0 | | 0 | 1/a2 | | | 0 |
| 0 | | a3 | 0 | 0 | mariks invers | 0 | | 1/a3 | | 0 |
| : | | | | : | | | | | | |
| 0 | 0 | 0 | 0 | an | | 0 | 0 | 0 | 0 | 1/a<br>n |

Berlaku : $\left(D^k\right)^{-1} = (D^{-1})^k$

# Penyelesaian soal UTS Matematika Teknik 1

Kelas SP Semester Genap 2021 kelas A

Dosen : Ni Ketut Caturwati

## Soal 1.

Diketahui matriks2 berikut :

$$A = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Kerjakan perkalian matriks berikut :

a. M = AxB
b. N = A x C
c. O = C x B
d. P = C x A

a. M = AxB

$$\begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

tidak bisa karena ordo (3x1)(3x2)

b. N = A x C

$$\begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 10 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 6 & 15 & 3 \end{vmatrix}$$

(3x1)(1x3) = (3x3)

c. O = C x B

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 15 \end{vmatrix}$$

(1x3)(3x2) = (1x2)

d. P = C x A

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12 \end{vmatrix}$$

# Soal 2.

Diketahui matriks 3x3 berikut :

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

Tentukan :

a. Determinan Matriks B.
b. Matriks C = co factor matriks B
c. Matriks D = Adjoint matriks B
d. Matriks Invers B

- a. Determinan Matriks B = 10+16+36-16-6-60 = -20

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 4 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 5 & 4 & 6 \end{array}\right.$$

- Atau dengan buat upper triangular matriks

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 5 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -10 & -5 \\ 0 & -10 & -3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -10 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

  - Det B = 1*(-10)*2 = -20

b. Matriks C = co factor $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 5 \end{bmatrix}$

c11 = det$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$ = 10-6 = 4

c12 =-det$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ = -(15-4) = -11

c13 = det$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ = 18-8 = 10

c21 = -det$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$ = -(20-12) =- 8

c22 = det$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ = 5- 8= -3

c23 = -det$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ = -(6-16) = 10

c31 = det$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ = 4-4 = 0

c32 = -det$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ = -(1-6) = 5

c33 = det$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ = 2-12 = -10

Co-factor B = $\begin{bmatrix} 4 & -11 & 10 \\ -8 & -3 & 10 \\ 0 & 5 & -10 \end{bmatrix}$

c. Matriks D = Adjoint matriks B

$$D = C^T = \begin{bmatrix} 4 & -11 & 10 \\ -8 & -3 & 10 \\ 0 & 5 & -10 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 4 & -8 & 0 \\ -11 & -3 & 5 \\ 10 & 10 & -10 \end{bmatrix}$$

d. Matriks Invers B = $\frac{adj\ B}{\mathrm{de}}$

$$B^{-1} = \frac{1}{-20}\begin{bmatrix} 4 & -8 & 0 \\ -11 & -3 & 5 \\ 10 & 10 & -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.4 & 0 \\ 0.55 & 0.15 & -0.25 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

## Soal 3.

Tentukan matriks Invers dari matriks2 berikut :

a. Q = $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

b. R = $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

a. Invers dari Q = $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ det Q = 12-2 = 10

adj Q = $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

$Q^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 \end{bmatrix}$

b. Invers dari R = $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

det R = $\left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right.$ = 8+5+24-8-20-6 = 3

cofactor R = $\begin{bmatrix} -6 & -1 & 4 \\ 6 & 0 & -3 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ adj R = $\begin{bmatrix} -6 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

$$R^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -6 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -0.33 & 0 & 0.67 \\ 1.33 & -1 & 0.33 \end{bmatrix}$$

Atau dengan cara OBE (Operasi Baris Eliminasi)

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 4 | 1 | 0 | 0 | b1/2 | 1 | 0.5 | 2 | 0.5 | 0 | 0 | | 1 | 0.5 | 2 | 0.5 | 0 | 0 |
| 3 | 2 | 5 | 0 | 1 | 0 | | 3 | 2 | 5 | 0 | 1 | 0 | b2-3b1 | 0 | 0.5 | -1 | -1.5 | 1 | 0 |
| 1 | 2 | 2 | 0 | 0 | 1 | | 1 | 2 | 2 | 0 | 0 | 1 | b3-b1 | 0 | 1.5 | 0 | -0.5 | 0 | 1 |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.5 | 2 | 0.5 | 0 | 0 | | 1 | 0.5 | 2 | 0.5 | 0 | 0 | | 1 | 0.5 | 2 | 0.5 | 0 | 0 |
| 0 | 0.5 | -1 | -1.5 | 1 | 0 | 2*b2 | 0 | 1 | -2 | -3 | 2 | 0 | | 0 | 1 | -2 | -3 | 2 | 0 |
| 0 | 1.5 | 0 | -0.5 | 0 | 1 | | 0 | 1.5 | 0 | -0.5 | 0 | 1 | b3-1.5*b2 | 0 | 0 | 3 | 4 | -3 | 1 |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.5 | 2 | 0.5 | 0 | 0 | | 1 | 0.5 | 2 | 0.5 | 0 | 0 | b1-2b3 | 1 | 0.5 | 0 | -2.17 | 2 | -0.67 |
| 0 | 1 | -2 | -3 | 2 | 0 | | 0 | 1 | -2 | -3 | 2 | 0 | b2_2b3 | 0 | 1 | 0 | -0.33 | 0 | 0.667 |
| 0 | 0 | 3 | 4 | -3 | 1 | b3/3 | 0 | 0 | 1 | 1.333 | -1 | 0.333 | | 0 | 0 | 1 | 1.333 | -1 | 0.333 |

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.5 | 0 | -2.17 | 2 | -0.67 | b1-0.5b2 | 1 | 0 | 0 | -2 | 2 | -1 |
| 0 | 1 | 0 | -0.33 | 0 | 0.667 | | 0 | 1 | 0 | -0.33 | 0 | 0.667 |
| 0 | 0 | 1 | 1.333 | -1 | 0.333 | | 0 | 0 | 1 | 1.333 | -1 | 0.333 |

# Soal 4.

a. Gunakan metode gauss-Jordan dalam menentukan invers matriks 4x4 berikut ini :

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & -2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

b. Buktikan bahwa $A^{-1}.A = I$

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 4 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | b1*0.5 | 1 | 1.5 | 2 | 0.5 | 0.5 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | -1 | 2 | 4 | 0 | 1 | 0 | 0 | | 0 | -1 | 2 | 4 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 2 | 1 | 3 | 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | | 2 | 1 | 3 | 2 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 4 | -2 | 5 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | | 4 | -2 | 5 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.5 | 2 | 0.5 | 0.5 | 0 | 0 | 0 | | 1 | 1.5 | 2 | 0.5 | 0.5 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | -1 | 2 | 4 | 0 | 1 | 0 | 0 | b2*(-1) | 0 | 1 | -2 | -4 | 0 | -1 | 0 | 0 |
| 2 | 1 | 3 | 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | b3-2*b1 | 0 | -2 | -1 | 1 | -1 | 0 | 1 | 0 |
| 4 | -2 | 5 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | b4-4*b1 | 0 | -8 | -3 | -1 | -2 | 0 | 0 | 1 |

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.5 | 2 | 0.5 | 0.5 | 0 | 0 | 0 | | 1 | 1.5 | 2 | 0.5 | 0.5 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | -2 | -4 | 0 | -1 | 0 | 0 | | 0 | 1 | -2 | -4 | 0 | -1 | 0 | 0 |
| 0 | -2 | -1 | 1 | -1 | 0 | 1 | 0 | b3+2*b2 | 0 | 0 | -5 | -7 | -1 | -2 | 1 | 0 |
| 0 | -8 | -3 | -1 | -2 | 0 | 0 | 1 | b4+8*b2 | 0 | 0 | -19 | -33 | -2 | -8 | 0 | 1 |

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.5 | 2 | 0.5 | 0.5 | 0 | 0 | 0 | | 1 | 1.5 | 2 | 0.5 | 0.5 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | -2 | -4 | 0 | -1 | 0 | 0 | | 0 | 1 | -2 | -4 | 0 | -1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | -5 | -7 | -1 | -2 | 1 | 0 | b3/(-5) | 0 | 0 | 1 | 1.4 | 0.2 | 0.4 | -0.2 | 0 |
| 0 | 0 | -19 | -33 | -2 | -8 | 0 | 1 | | 0 | 0 | -19 | -33 | -2 | -8 | 0 | 1 |

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.5 | 2 | 0.5 | 0.5 | 0 | 0 | 0 | | 1 | 1.5 | 2 | 0.5 | 0.5 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | -2 | -4 | 0 | -1 | 0 | 0 | | 0 | 1 | -2 | -4 | 0 | -1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1.4 | 0.2 | 0.4 | -0.2 | 0 | | 0 | 0 | 1 | 1.4 | 0.2 | 0.4 | -0.2 | 0 |
| 0 | 0 | -19 | -33 | -2 | -8 | 0 | 1 | b4+19*b3 | 0 | 0 | 0 | -6.4 | 1.8 | -0.4 | -3.8 | 1 |

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.5 | 2 | 0.5 | 0.5 | 0 | 0 | 0 | | 1 | 1.5 | 2 | 3.7 | -0.4 | 0.2 | 1.9 | -0.5 |
| 0 | 1 | -2 | -4 | 0 | -1 | 0 | 0 | | 0 | 1 | -2 | -30 | 7.2 | -2.6 | -15 | 4 |
| 0 | 0 | 1 | 1.4 | 0.2 | 0.4 | -0.2 | 0 | | 0 | 0 | 1 | -5 | 2 | 0 | -4 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | -6.4 | 1.8 | -0.4 | -3.8 | 1 | b4/(-6.4) | 0 | 0 | 0 | 1 | -0.3 | 0.06 | 0.59 | -0.2 |

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.5 | 2 | 3.7 | -0.4 | 0.2 | 1.9 | -0.5 | b1-3.7*b4 | 1 | 1.5 | 2 | 0 | 0.64 | -0 | -0.3 | 0.08 |
| 0 | 1 | -2 | -30 | 7.2 | -2.6 | -15 | 4 | b2+29.6*b4 | 0 | 1 | -2 | 0 | -1.1 | -0.8 | 2.38 | -0.6 |
| 0 | 0 | 1 | -5 | 2 | 0 | -4 | 1 | b3+5*b4 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0.59 | 0.31 | -1 | 0.22 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | -0.3 | 0.06 | 0.59 | -0.2 | | 0 | 0 | 0 | 1 | -0.2 | 0.22 | 0.17 | -0 |

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.5 | 2 | 0 | 0.64 | -0 | -0.3 | 0.08 | b1-2*b3 | 1 | 1.5 | 0 | 0 | -0.5 | -0.7 | 1.77 | -0.4 |
| 0 | 1 | -2 | 0 | -1.1 | -0.8 | 2.38 | -0.6 | b2+2*b3 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0.06 | -0.1 | 0.31 | -0.2 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0.59 | 0.31 | -1 | 0.22 | | 0 | 0 | 1 | 0 | 0.59 | 0.31 | -1 | 0.22 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | -0.2 | 0.22 | 0.17 | -0 | | 0 | 0 | 0 | 1 | -0.2 | 0.22 | 0.17 | -0 |

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.5 | 0 | 0 | -0.5 | -0.7 | 1.77 | -0.4 | b1-1.5b2 | 1 | 0 | 0 | 0 | -0.6 | -0.5 | 1.3 | -0.1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0.06 | -0.1 | 0.31 | -0.2 | | 0 | 1 | 0 | 0 | 0.06 | -0.1 | 0.31 | -0.2 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0.59 | 0.31 | -1 | 0.22 | | 0 | 0 | 1 | 0 | 0.59 | 0.31 | -1 | 0.22 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | -0.2 | 0.22 | 0.17 | -0 | | 0 | 0 | 0 | 1 | -0.2 | 0.22 | 0.17 | -0 |

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A^{-1}A$ | -0.6 | -0.5 | 1.3 | -0.1 | 2 | 3 | 4 | 1 | | 1 | -0 | -0 | 0 |
| | 0.06 | -0.1 | 0.31 | -0.2 | 0 | -1 | 2 | 4 | = | -0 | 1 | -0 | -0 |
| | 0.59 | 0.31 | -1 | 0.22 | 2 | 1 | 3 | 2 | | 0 | 0 | 1 | 0 |
| | -0.2 | 0.22 | 0.17 | -0 | 4 | -2 | 5 | 1 | | -0.2 | -0.7 | 0 | 1 |

# Soal 4. Menggunakan cara lain

- Matriks A :

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & -2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 4 | 1 | | 2 | 3 | 4 | 1 | | 2 | 3 | 4 | 1 | | 2 | 3 | 4 | 1 |
| 0 | -1 | 2 | 4 | | 0 | -1 | 2 | 4 | | 0 | -1 | 2 | 4 | | 0 | -1 | 2 | 4 |
| 2 | 1 | 3 | 2 | b3-b1 | 0 | -2 | -1 | 1 | b3-2b2 | 0 | 0 | -5 | -7 | | 0 | 0 | -5 | -7 |
| 4 | -2 | 5 | 1 | b4-2b1 | 0 | -8 | -3 | -1 | b4-8b2 | 0 | 0 | -19 | -33 | b3-3.8(b3) | 0 | 0 | 0 | -6 |

Det A = 2(-1)(-5)(-6) = -60

Cari cofactor

Cari adj A

Invers A =

# Matematika Teknik I
# Penyelesaian Persamaan Linier (OBE)

Semester Antara 2021

Oleh : Ni Ketut Caturwati

# Penyelesaian dengan OBE (Operasi Baris Elementer)

- Penyelesaian persamaan linier memerlukan n persamaan bebas untuk n variable yang dicari.

**Contoh 1. :**

Tentukan nilai x1, x2 dan x3 dari tiga persamaan berikut :

1. $2x_1 + x_2 + 3x_3 = 4$
2. $x_1 + x_2 + 2x_3 = 3$
3. $2x_1 - 4x_2 + x_3 = 2$

Tiga persamaan tersebut dapat dinyatakan dalam persamaan matriks :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- Langkah 1.

Bentuk matriks yang diperluas (augmented matrix) dan lakukan operasi baris elementer hingga matriks inti berbentuk matriks identitas.

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 3 | 4 | b1/2 | 1 | 0.5 | 1.5 | 2 | | 1 | 0.5 | 1.5 | 2 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | | 1 | 1 | 2 | 3 | b2-b1 | 0 | 0.5 | 0.5 | 1 |
| 2 | -4 | 1 | 2 | | 2 | -4 | 1 | 2 | b3-2b1 | 0 | -5 | -2 | -2 |

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.5 | 1.5 | 2 | | 1 | 0.5 | 1.5 | 2 | | 1 | 0.5 | 1.5 | 2 |
| 0 | 0.5 | 0.5 | 1 | 2b2 | 0 | 1 | 1 | 2 | | 0 | 1 | 1 | 2 |
| 0 | -5 | -2 | -2 | | 0 | -5 | -2 | -2 | b3+5b2 | 0 | 0 | 3 | 8 |

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.5 | 1.5 | 2 | | 1 | 0.5 | 1.5 | 2 | b1-1.5b3 | 1 | -1 | 0 | -1 |
| 0 | 1 | 1 | 2 | | 0 | 1 | 1 | 2 | b2-b1 | 0 | 1 | 0 | -1 |
| 0 | 0 | 3 | 8 | b3/3 | 0 | 0 | 1 | 2.7 | | 0 | 0 | 1 | 2.7 |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | -1 | 0 | -1 | b1+b2 | 1 | 0 | 0 | -2 |
| 0 | 1 | 0 | -1 | | 0 | 1 | 0 | -1 |
| 0 | 0 | 1 | 2.7 | | 0 | 0 | 1 | 2.7 |

Langkah 2 :

Solusi dari persamaan linier tersebut adalah :

$$x_1 = -2$$
$$x_2 = -1$$
$$x_3 = 2.7$$

Contoh 2.

Tentukan penyelesaian dari persamaan persamaan berikut :

Pers 1. $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5$

Pers 2. $2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 3$

Pers 3 $x_1 + 8x_3 = 17$

Bentuk Matriks diperluas augmented matriks:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 8 & 17 \end{vmatrix}$$

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 5 | | 1 | 2 | 3 | 5 | | 1 | 2 | 3 | 5 |
| 2 | 5 | 3 | 3 | b2-2b1 | 0 | 1 | -3 | -7 | | 0 | 1 | -3 | -7 |
| 1 | 0 | 8 | 17 | b3-b1 | 0 | -2 | 5 | 12 | b3+2b2 | 0 | 0 | -1 | -2 |

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 5 | | 1 | 2 | 3 | 5 | b1-3b3 | 1 | 2 | 0 | -1 |
| 0 | 1 | -3 | -7 | | 0 | 1 | -3 | -7 | b2+3b3 | 0 | 1 | 0 | -1 |
| 0 | 0 | -1 | -2 | b3(-1) | 0 | 0 | 1 | 2 | | 0 | 0 | 1 | 2 |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 0 | -1 | b1-2b2 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | -1 | | 0 | 1 | 0 | -1 |
| 0 | 0 | 1 | 2 | | 0 | 0 | 1 | 2 |

Solusi Persamaan tersebut : $x_1 = 1$ ; $x_2 = -1$ $dan$ $x_3 = 2$

**Contoh 3**

Tentukan solusi dari persamaan berikut :

$$x + y + 2z = 9$$

$$2x+4y-3z = 1$$

$$3x+6y-5z = 0$$

Bentuk matriks diperluas :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{vmatrix}$$

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 9 | | 1 | 1 | 2 | 9 | | 1 | 1 | 2 | 9 |
| 2 | 4 | -3 | 1 | b2-2b1 | 0 | 2 | -7 | -17 | b2/2 | 0 | 1 | -3.5 | -8.5 |
| 3 | 6 | -5 | 0 | b3-3b1 | 0 | 3 | -11 | -27 | | 0 | 3 | -11 | -27 |

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 9 | | 1 | 1 | 2 | 9 | | 1 | 1 | 2 | 9 |
| 0 | 1 | -3.5 | -8.5 | | 0 | 1 | -3.5 | -8.5 | | 0 | 1 | -3.5 | -8.5 |
| 0 | 3 | -11 | -27 | b3-3b2 | 0 | 0 | -0.5 | -1.5 | b3(-2) | 0 | 0 | 1 | 3 |

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 9 | b1-2b3 | 1 | 1 | 0 | 3 | b1-b2 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | -3.5 | -8.5 | b2+3.5b3 | 0 | 1 | 0 | 2 | | 0 | 1 | 0 | 2 |
| 0 | 0 | 1 | 3 | | 0 | 0 | 1 | 3 | | 0 | 0 | 1 | 3 |

Solusi : x = 1 ; y = 2 dan z=3

# Catatan :

- Jika matriks inti memiliki nilai Determinan $\neq 0$ maka solusi persamaan memiliki nilai jawab tunggal untuk tiap variable.
- Jika matriks inti nilai determinan = 0 maka nilai variable ada tidak tunggal atau tidak punya solusi pasti.

# Matematika Teknik I
## Penyelesaian Persamaan Linier
## (Invers Matriks dan Cramer's Rule)

Semester Antara 2021

Oleh : Ni Ketut Caturwati

**INVERS MATRIKS**

Gunakan persamaan Matriks :

$$AX = B$$

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

$$X = A^{-1}.B$$

**Contoh 1**

Tentukan nilai x1, x2 dan x3 dari tiga persamaan berikut :

1. $2x_1 + x_2 + 3x_3 = 4$
2. $x_1 + x_2 + 2x_3 = 3$
3. $2x_1 - 4x_2 + x_3 = 2$

Tiga persamaan tersebut dapat dinyatakan dalam persamaan matriks :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

A X = B

$X = A^{-1}$ . B

Tentukan matriks invers A

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 3 | 1 | 0 | 0 | b1/2 | 1 | 0.5 | 1.5 | 0.5 | 0 | 0 | | 1 | 0.5 | 1.5 | 0.5 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 2 | 0 | 1 | 0 | | 1 | 1 | 2 | 0 | 1 | 0 | b2-b1 | 0 | 0.5 | 0.5 | -1 | 1 | 0 |
| 2 | -4 | 1 | 0 | 0 | 1 | | 2 | -4 | 1 | 0 | 0 | 1 | b3-2b1 | 0 | -5 | -2 | -1 | 0 | 1 |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.5 | 1.5 | 0.5 | 0 | 0 | | 1 | 0.5 | 1.5 | 0.5 | 0 | 0 | | 1 | 0.5 | 1.5 | 0.5 | 0 | 0 |
| 0 | 0.5 | 0.5 | -1 | 1 | 0 | b2*2 | 0 | 1 | 1 | -1 | 2 | 0 | | 0 | 1 | 1 | -1 | 2 | 0 |
| 0 | -5 | -2 | -1 | 0 | 1 | | 0 | -5 | -2 | -1 | 0 | 1 | b3+5*b2 | 0 | 0 | 3 | -6 | 10 | 1 |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.5 | 1.5 | 0.5 | 0 | 0 | | 1 | 0.5 | 1.5 | 0.5 | 0 | 0 | b1-1.5b3 | 1 | 0.5 | 0 | 3.5 | -5 | -1 |
| 0 | 1 | 1 | -1 | 2 | 0 | | 0 | 1 | 1 | -1 | 2 | 0 | b2-b3 | 0 | 1 | 0 | 1 | -1 | -0 |
| 0 | 0 | 3 | -6 | 10 | 1 | b3/3 | 0 | 0 | 1 | -2 | 3.3 | 0.3 | | 0 | 0 | 1 | -2 | 3.3 | 0.3 |

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.5 | 0 | 3.5 | -5 | -1 | b1-0.5b2 | 1 | 0 | 0 | 3 | -4 | -0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | -1 | -0 | | 0 | 1 | 0 | 1 | -1 | -0 |
| 0 | 0 | 1 | -2 | 3.3 | 0.3 | | 0 | 0 | 1 | -2 | 3.3 | 0.3 |

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3.3 & 0.3 \end{bmatrix}$$

- $X = A^{-1}.B = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3.3 & 0.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.7 \\ -0.7 \\ 2.67 \end{bmatrix}$

X1 = -1.7

X2 = -0.7

X3 = 2.67

# Contoh 2.

Diberikan 2 buah persamaan untuk menentukan dua variable sebagai berikut :

Persamaan 1 : 4a – 3b = -3

Persamaan 2 : 2a – 5b = 9

Dapat dinyatakan sebagai :

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Tentukan matriks invers :

det A = (4)(-5) –(2)(-3) = -14

adj A = $\begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ $A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.36 & -0.21 \\ 0.14 & -0.29 \end{bmatrix}$

-

- Sehingga :

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.36 & -0.21 \\ 0.14 & -0.29 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.97 \\ -3.03 \end{bmatrix}$$

Jadi : a = -2.97 dan b = -3.03

# CRAMER'S RULE

Persamaan matriks untuk persamaan linier yang dinyatakan dengan :

Ax = b

Maka nilai ; $x_1 = \frac{\det A_1}{\det A}$ ; $x_2 = \frac{\det A_2}{\det A}$ ; $x_n = \frac{\det A_n}{\det A}$

Dimana $A_i$ : *matrik yang kolom ke i diganti dengan matriks b*

## Contoh 1.

- $\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} -3 \\ 9 \end{bmatrix}$ tentukan nilai a dan b menurut cramer's rule
- $a = \dfrac{\det\begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 9 & -5 \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}}$ = $\dfrac{(-3)(-5)-(9)(-3)}{(4)(-5)-(2)(-3)}$ = $\dfrac{42}{-14}$ = -3
- b = $\dfrac{\det\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}}{det\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}}$ = $\dfrac{(4)(9)-(2)(-3)}{-14}$ = $\dfrac{42}{-14} = -3$

## Contoh 2. Cramer's rule

x + 2 z = 6

-3x+4y+6z = 30

-x-2y+3z = 8

Persamaan Matriks :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 30 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Det A = $\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 6 & -3 & 4 \\ -1 & -2 & 3 & -1 & -2 \end{array}\right.$ = 12+0+12-(-8) –(-12) -0= 44

Det A1 = $\left|\begin{array}{ccc|cc} 6 & 0 & 2 & 6 & 0 \\ 30 & 4 & 6 & 30 & 4 \\ 8 & -2 & 3 & 8 & -2 \end{array}\right.$ = -40 nilai x = $\frac{-4}{44}$ =-0.9

Det A2 = $\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 6 & 2 & 1 & 6 \\ -3 & 30 & 6 & -3 & 30 \\ -1 & 8 & 3 & -1 & 8 \end{array}\right.$ = 72 nilai y = $\frac{72}{44}$ = 1.6

Det A3 = $\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 6 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 30 & -3 & 4 \\ -1 & -2 & 8 & -1 & -2 \end{array}\right.$ = 152 nilai z = $\frac{152}{44}$ = 3.45

# Contoh 3. Cramer's rule

Tentukan nilai x1, x2 dan x3 dari tiga persamaan berikut :

1. $2x_1 + x_2 + 3x_3 = 4$
2. $x_1 + x_2 + 2x_3 = 3$
3. $2x_1 - 4x_2 + x_3 = 2$

Tiga persamaan tersebut dapat dinyatakan dalam persamaan matriks :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- Det A = $\left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 1 & 2 & -4 \end{array}\right.$ = 3

Det A1 = $\left|\begin{array}{ccc|cc} 4 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & 1 & 2 & -4 \end{array}\right.$ = -5 x1 = - 1.67

Det A2 = $\left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 4 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right.$ = -2 X2 = $\frac{-2}{3}$ = - 0.67

Det A3 = $\left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 & 2 & -4 \end{array}\right.$ = 8 X3 = $\frac{8}{3}$ = 2.67

# Matematika Teknik I

## Quiz - Penyelesaian Persamaan Linier

Semester pendek 2021

Dosen : Dr. Ir. Ni Ketut Caturwati, MT.

## Soal 1.

- Diberikan dua persamaan linier dengan dua variable yang belum diketahui :

$$3x + 2y = 6$$
$$2x + 3y = 8$$

a. Tentukan ni lai x dan y dengan metode OBE (Operasi Baris Eliminasi)
b. Tentukan nilai x dan y dengan matriks invers
c. Tentukan nilai x dan y dengan Cramer’s rule

# Soal 2.

- Diketahui 3 persamaan linier berikut.

$$3x + 2y + z = 10$$
$$5y + 3z = 12$$
$$2x + y + 4z = 8$$

a. Tentukan nilai dari x,y dan z dengan aturan cramer

b. Tentukan nilai x,y,z dengan OBE

# Soal 3.

Diberikan 4 persamaan dengan 4 variable berikut :

$$2a + 3b + 4c + 5d = 15$$
$$2a + 4b + c + d = 10$$
$$a + b + 5c + 2d = 8$$
$$3a + 3b + 2c + 4d = 20$$

Tentukan nilai a.b, c dan d.

## Soal 4

- Diberikan 3 buah persamaan berikut :

$$3x + 2y + 5z = 12$$
$$x + y + 2z = 8$$
$$x + z = 7$$

Buat analisa dari ketiga persamaan tersebut. Apakah memiliki nilai x,y z yang tunggal ? Jelaskan.

# Matematika teknik I kombinasi linier beberapa vektor

Semester Antara 2021

Oleh : Ni Ketut Caturwati

## Vektor : $\vec{v}$ atau v

- memiliki besar dan arah. Untuk Cartesian system umum dinyatakan sebagai **A** = a**x** +b**y** +c**z** atau dinyatakan sebagai A = a**i** +b**j** +c**k**
- Dapat pula vector A dinyatakan sebagai A = (a,b,c)
- Satu vector dapat merupakan kombinasi dari beberapa vector lainnya.

misal : **a** = (1,0,0) vector satuan arah i (sumbu x)

**b** = (0,1,0) vector satuan arah j (sumbu y)

**c** = (0,0,1) vector satuan arah k (sumbu z)

Berarti vector **u** = (2,3,-4) merupakan kombinasi linier dari vector **a,b,c** dengan persamaan linier :

**u** = 2**a** +3**b** – 4**c**

## Kombinasi Linier Vektor vektor

- Nyatakan apakah vector **u** = (1,2,-1) dan **v** = (6,4,2) merupakan vector penyusun dari vector **w**= (9,2,7)
- atau dengan kata lain apakah vector **w** merupakan kombinasi linier dari vector **u** dan **v** ?

Jawab :

jika **w** kombinasi linier dari **u** dan **v** maka akan berlaku persamaan linier

$\vec{w} = k_1\vec{u} + k_2\vec{v}$ dimana $k_1$ $dan$ $k_2$ = konstanta.

(9,2,7) = $k_1$ $(1,2,-1) + k_2(6,4,2)$

Berlaku : 9 = k1 + 6 k2

2 = 2. k1 + 4 k2

7 = - k1 + 2 k2

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 9 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

## Gunakan eliminasi Gaus untuk menentukan konstanta k1 dan k2

- $\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 9 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} \rightarrow$

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 6 | 9 | b2-2b1 | 1 | 6 | 9 | | 1 | 6 | 9 |
| 2 | 4 | 2 | | 0 | -8 | -16 | b2/-8 | 0 | 1 | 2 |
| -1 | 2 | 7 | b3+b1 | 0 | 8 | 16 | b3+b2 | 0 | 0 | 0 |

- Jadi k1+6k2 = 9 dan k2 =2

  k1 = 9 – 6*2 = -3

- $\vec{\boldsymbol{w}} = -3\vec{\boldsymbol{u}} + 2\vec{\boldsymbol{v}}$

# Contoh kombinasi vector tidak linier

- Vector **u** = (1,2,-1) dan **v** = (6,4,2) . Selidiki apakah vector **w**= (4,-1,8) merupakan kombinasi linier dari vector **u** dan **v** ?
- Jika kombinasi linier maka akan ada konstanta k1 dan k2 dari persamaan : $\vec{x} = k_1\vec{u} + k_2\vec{v}$
  - (4,-1,8) = k1 (1,2,-1) + k2 (6,4,2)

Berlaku :

4 = k1 + 6 k2

-1 = 2 k1 +4 k2

8 = -k1 +2 k2

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix}$$

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 6 | 4 | b2-2b1 | 1 | 6 | 9 | | 1 | 6 | 9 |
| 2 | 4 | -1 | | 0 | -8 | -9 | b2/-8 | 0 | 1 | 1.13 |
| -1 | 2 | 8 | b3+b1 | 0 | 8 | 12 | b3+b2 | 0 | 0 | 3 |

Tidak ada nilai k1 dan k2 yang memenuhi. Jadi **x** bukan kombinasi linier vector **u** dan **v.**

## Kombinasi Linier 3 vektor

Diketahui : **u** = (2,1,4) ; **v** = (1,-1,3) dan **w** = (3,2,5)

Tentukan kombinasi linier vector tersebut pada **z** = (-9,-7,-5)

$$\vec{z} = k_1\vec{u} + k_2\vec{v} + k_3\vec{w}$$

Sehingga :

-9 = 2.k1 + k2+ 3.k3

-7 = k1-k2+2.k3

-5 = 4.k1 +3.k2 + 5k3

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k1 \\ k2 \\ k3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ -7 \\ -5 \end{bmatrix}$$

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 3 | -9 | | 2 | 1 | 3 | -9 | | 2 | 1 | 3 | -9 | | 2 | 1 | 3 | -9 |
| 1 | -1 | 2 | -7 | b2-b1/2 | 0 | -1.5 | 0.5 | -2.5 | | 0 | 1 | -1 | 3 | | 0 | 1 | -1 | 3 |
| 4 | 3 | 5 | -15 | b3-2b1 | 0 | 1 | -1 | 3 | tukar | 0 | -1.5 | 0.5 | -2.5 | b3+1,5b2 | 0 | 0 | -1 | 2 |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 3 | -9 | | 2 | 1 | 3 | -9 | b1-3b3 | 2 | 1 | 0 | -3 | b1-b2 | 2 | 0 | 0 | -4 |
| 0 | 1 | -1 | 3 | | 0 | 1 | -1 | 3 | b2+b3 | 0 | 1 | 0 | 1 | | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | -1 | 2 | -B3 | 0 | 0 | 1 | -2 | | 0 | 0 | 1 | -2 | | 0 | 0 | 1 | -2 |

Jadi nilai k3 = -2 ; k2 = 1 dan k1 =-2

Atau **z** = -2**u** +**v**-2**w**

vector **z** merupakan kombinasi linier dari vector **u**,**v**,**w**

# Vektor bergantung linier

- Jika salah satu vector dapat dinyatakan dalam kombinasi linier terhadap vector lainnya, maka vector tersebut dinyatakan bergantung linier (linier dependent).
- Sebaliknya jika tidak dapat dinyatakan dalam kombinasi liniernya maka dinyatakan sebagai vector bebas linier.

Contoh vector bergantung linier (dependent) :

**u** = (-1,2,4) **v** = (5, -10, -20)

karena **v** = 5 **u**.

Contoh : vector bebas linier (independent linier)

**u** = (-1,2,4) **v** = (0,1,3)

## Untuk memeriksa vector linier dependent atau independent

- Untuk jumlah vector $\geq$ dimensinya : Buat matriks persegi dan tentukan determinannya.
- Jika det A = 0 maka vector ada yang dependent.
- Jika det A $\neq$ 0 maka vector independent.

# Matematika teknik 1
# Transformasi linier matriks

Semester Pendek 2021

Dr. Ir. Ni Ketut Caturwati, MT.

## Transformasi linier matriks

Y = X.T $\rightarrow$ $X^{-1}Y = X^{-1}.XT$ = T

T = $X^{-1}Y$

Sebaliknya persamaan :

Y = TX $\rightarrow$ $Y.X^{-1} = TX.X^{-1}$

T = Y.$X^{-1}$

Ingat :

$X^{-1}TX \neq T$ $\quad$ $X^{-1}.X.T = T = TX.X^{-1}$

## Transformasi linier suatu matriks :

$$AX = \boldsymbol{\lambda}.X$$

dimana $\boldsymbol{\lambda}$ suatu konstanta yang dikenal sebagai nilai eigen (Eigen Value)

Menentukan nilai Eigen :

$$[\boldsymbol{\lambda} I - A]\mathrm{X} = 0$$

**Nilai Eigen** adalah nilai karakteristik dari suatu matriks berukuran n x n, sementara vektor Eigen adalah vektor kolom bukan nol yang bila dikalikan dengan suatu matriks berukuran n x n akan menghasilkan vektor lain yang memiliki nilai kelipatan dari vektor Eigen itu sendiri

## Contoh tentukan eigen value dan vector eigen dari matriks A berikut:

- A = $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ X = $\begin{bmatrix} x1 \\ x2 \end{bmatrix}$ AX = $\boldsymbol{\lambda}$.X
- $[\boldsymbol{\lambda} I - A]\mathrm{X} = 0$
- Det $[\boldsymbol{\lambda} I - A] = 0$
- $[\boldsymbol{\lambda} I \ - A] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda} - 1 & -3 \\ -4 & \boldsymbol{\lambda} - 2 \end{bmatrix}$
- Det $[\boldsymbol{\lambda} I - A] = (\boldsymbol{\lambda}\text{-}1)(\boldsymbol{\lambda}\text{-}2)\text{-}(\text{-}4)(\text{-}3) = \boldsymbol{\lambda}^2 - 3\boldsymbol{\lambda} + 2 \ - 12$

Det $[\boldsymbol{\lambda} I - A] = \boldsymbol{\lambda}^2 - 3\boldsymbol{\lambda} - 10 = (\boldsymbol{\lambda}\text{-}5)(\boldsymbol{\lambda}+2)$

Eigen Value /nilai eigen yang memenuhi :

$\boldsymbol{\lambda} = 5$ dan $\boldsymbol{\lambda} = \text{-}2$

# Vektor eigen

Untuk eigen value $\boldsymbol{\lambda} = 5$ berlaku

$\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \end{bmatrix}$ = 0

4.x1 -3 x2 = 0 $\rightarrow$ x1 = ¾ . X2

vector eigen : x = $\begin{bmatrix} \frac{3}{4}t \\ t \end{bmatrix}$

Untuk eigen value $\boldsymbol{\lambda} =$ -2 berlaku :

$\begin{bmatrix} -3 & -3 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ x3 \end{bmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad$ -3.x1 – 3.x2 = 0

x1 = -x2 $\rightarrow$ vector eigen : X = $\begin{bmatrix} t \\ -t \end{bmatrix}$

# Eigen value and eigen vector matriks 3x3

- Tentukan nilai eigen dari matriks :
- A = $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ nilai eigen ditentukan dengan $\boldsymbol{\lambda}$I-A $= 0$
- Det $\begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda} - 4 & 0 & 1 \\ -2 & \boldsymbol{\lambda} - 1 & 0 \\ -2 & 0 & \boldsymbol{\lambda} - 1 \end{bmatrix}$ = 0
- ($\boldsymbol{\lambda}$-4)($\boldsymbol{\lambda}$-1)$\boldsymbol{\lambda}$-1)-1($\boldsymbol{\lambda}$-1)(-2) = 0
- $(\boldsymbol{\lambda}^2 - 5\boldsymbol{\lambda} + 4)$($\boldsymbol{\lambda}$-1)+2$\boldsymbol{\lambda}$-2 =0
- $\boldsymbol{\lambda}^3 - 5\boldsymbol{\lambda}^2 + 4\boldsymbol{\lambda}$-$\boldsymbol{\lambda}^2 + 5\boldsymbol{\lambda} - 4 + 2\boldsymbol{\lambda} - 2 = \boldsymbol{\lambda}^3$-6$\boldsymbol{\lambda}^2$+11$\boldsymbol{\lambda}$-6 = 0 cari $\boldsymbol{\lambda}$