STRUKTUR ALJABAR

Untuk Pemula

Bahan ajar dan Lembar Kerja dengan Pendekatan Terstruktur untuk Pembelajaran Model Studi Kasus

Anwar Mutaqin

Jurusan Pendidikan Matematika
Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan
Universitas Sultan Ageng Tirtayasa

STRUKTUR ALJABAR

Untuk Pemula

Bahan ajar dan Lembar Kerja dengan
Pendekatan Terstruktur untuk Pembelajaran
Model Studi Kasus

Anwar Mutaqin

Jurusan Pendidikan Matematika
Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan
Universitas Sultan Ageng Tirtayasa

PRAKATA

Ada dua masalah dalam matematika, yaitu masalah berkaitan dengan mencari jawaban dan masalah pembuktian (Polya, 1985: 154). Contoh masalah pertama adalah mencari turunan suatu fungsi, mencari nilai limit suatu barisan, dan mencari nilai optimal dari suatu fungsi tujuan dengan kendala tertentu. Masalah kedua berkaitan dengan membuktikan sifat-sifat atau teorema dalam matematika yang mendasari konsep tertentu, misalnya limit fungsi, integral, kekonvergenan barisan, dan lain-lain. Kedua masalah tersebut memiliki level mudah, sedang, dan sukar. Kemampuan pelajar untuk menyelesaikan kedua masalah tersebut dipelajari dan dilatih di Jurusan Matematika atau Pendidikan Matematika sejak tahun pertama. Kemampuan untuk mencari jawaban dan membuktikan sangat penting karena dengan dua masalah itu Matematika berkembang.

Berbeda dengan masalah terkait mencari jawaban, mahasiswa umumnya menganggap masalah pembuktian matematika dianggap lebih sulit, bahkan untuk masalah yang sebenarnya tergolong mudah. Hal ini karena untuk membuktikan suatu pernyataan matematika diperlukan kemampuan mencari ide pembuktian dan menuliskannya. Dalam pencarian ide, seorang mahasiswa harus mempelajari teorema-teorema dan buktinya, menghubungkan teorema yang telah dipelajari, dan memilih metode pembuktian. Diperlukan ilustrasi, kotretan, gambar, dan hal lain agar ide dan rangkaian pembuktian muncul.

Ketika ide pembuktian sudah didapat, mahasiswa tidak serta merta dapat menuliskannya dengan benar. Mereka kesulitan dalam merangkai kalimat bahasa Indonesia bersamaan dengan notasi dan konsep matematika. Mahasiswa cenderung menggunakan kalimat tidak baku dan kalimat yang tidak sesuai dengan matematika. Keadaan tersebut semakin rumit ketika mahasiswa meniru bukti dari buku berbahasa Inggris. Mereka banyak yang salah menerjemahkan atau kurang tepat memilih diksi. Keadaan tersebut dialami hampir semua mahasiswa Matematika dan Pendidikan Matematika.

Persoalan lain yang muncul adalah banyak buku teks untuk satu mata kuliah dengan gaya penulisan dan urutan materi yang beragam. Pada buku teks tertentu, teorema A ditulis lebih dulu kemudian digunakan untuk membuktikan teorema B. Sementara pada buku teks lain, teorema B digunakan untuk membuktikan teorema A. Pada kasus lain, suatu teorema pada buku tertentu menjadi soal latihan pada buku teks yang lain. Hal ini membingungkan mahasiswa pemula, sehingga diperlukan suatu buku panduan agar mereka dapat belajar secara optimal.

Bahan ajar dan lembar kerja ini dibuat untuk mengatasi kesulitan mahasiswa berkaitan dengan masalah pembuktian, khususnya pada mata kuliah Struktur Aljabar. Bahan ajar dan lembar kerja ini disusun dengan pendekatan terstruktur dalam menulis bukti dengan kombinasi *worked examples* dan *faded examples*. Dengan *worked examples* mahasiswa belajar menulis bukti dari bukti yang ditulis lengkap, sedangkan *faded examples* mahasiswa belajar menulis bukti dengan dituntun langkah-langkah tertentu.

Selain itu, bahan ajar dan lembar kerja ini digunakan dengan model Case Based Learning. Mahasiswa dibuat dalam beberapa kelompok dan setiap kelompok diberi suatu grup sebagai bahan analisis dan belajar menerapkan teorema. Ada delapan grup yang menjadi bahan belajar mahasiswa pada mata kuliah Struktur Aljabar yang dipandu melalui lembar kerja.

Bahan ajar dan lembar kerja ini diharapkan dapat membantu mahasiswa belajar masalah pembuktian melalui mata kuliah Struktur Aljabar. Harapan lebih lanjut adalah mahasiswa mampu membaca atau belajar dari buku-buku teks Struktur Aljabar yang banyak tersedia di perpustakaan.

Serang, Juni 2022
Penulis

DAFTAR ISI

PENDAHULUAN

Rasional

Misalnya ada persamaan dengan satu operasi, yaitu $5 + x = 9$. Pertanyaan mendasarnya adalah bagaimana mencari solusi persamaan tersebut? Seperti yang sudah umum diketahui, langkah-langkahnya adalah sebagai berikut

$$-5 + (5 + x) = -5 + 9$$
$$(-5 + 5) + x = 4$$
$$0 + x = 4$$
$$x = 4.$$

Jadi himpunan penyelesaiannya adalah $HP = \{4\}$.

Persoalan tersebut mudah karena sudah dikenal sejak sekolah menengah pertama. Tentu ada banyak himpunan, operasi biner, dan lain-lain. Bayangkan persamaan tersebut dalam bentuk $a * x = b$, dengan a dan b anggota himpunan tertentu. Bagaimana cara mencari solusi persamaan tersebut? Langkah-langkah yang dilakukan serupa dengan masalah yang pertama. Jadi,

$$d * (a * x) = d * b$$
$$(d * a) * x = d * b$$
$$e * x = d * b$$
$$x = d * b$$

Sebagai catatan: untuk memudahkan, Anda bisa menghilangkan tanda $*$.

Pertanyaannya adalah, himpunan seperti apa agar langkah-langkah tersebut dapat dilakukan? Perhatikan kembali langkah-langkah pada masalah yang pertama! Dalam hal ini persamaan tersebut berada pada himpunan bilangan bulat. Sifat pertama adalah setiap anggota himpunan tersebut harus mempunyai lawan atau istilah matematikanya invers, yaitu dua buah anggota himpunan dioperasikan menghasilkan anggota lain yang disebut identitas. Pada kasus pertama, invers 5 adalah -5 dan identitasnya adalah 0. Terlihat bahwa $-5 + 5 = 0$. Dalam hal ini 0 adalah unsur identitas. Selanjutnya himpunan tersebut harus memiliki sifat asosiatif. Agar solusi persamaan tersebut merupakan anggota bulat, maka operasi tersebut harus bersifat tertutup.

Himpunan dengan satu operasi di atas yang mempunyai keempat sifat itu disebut grup. Pada persamaan pertama yang semestanya himpunan bilangan bulat berlaku sifat komutatif. Pada kasus yang lebih umum, seperti persamaan kedua, sifat komutatif tidak berlaku. Ini merupakan salah satu kajian dalam Struktur Aljabar yang dikenal dengan Teori Grup.

Pada lembar kerja yang disediakan pada halaman-halaman selanjutnya, Anda diajak untuk mempelajari grup dan sifat-sifat yang muncul. Pada setiap lembar kerja, ada uraian materi dan pembuktian teorema yang disajikan dalam bentuk *worked examples* dan *faded examples*. Hal ini diharapkan membantu mahasiswa mempelajari materi dengan cara yang lebih efektif.

Selamat belajar.

LEMBAR KERJA I

Mata Kuliah : Struktur Aljabar

Dosen : Dr. Anwar Mutaqin

Semester : 4

Topik : Grup

Pengantar. Struktur Aljabar adalah himpunan yang disertai dengan satu atau dua buah operasi biner. Grup adalah salah satu struktur aljabar untuk himpunan yang disertai satu buah operasi biner. Perhatikan definisi operasi biner berikut.

Definisi 1.1. *Misalkan S adalah himpunan tak kosong. Operasi biner $*$ pada S adalah fungsi $*: S \times S \mapsto S$, yaitu memasangkan $(a, b) \in S \times S$ dengan $*(a, b) \in S$.*

Selanjutnya $*(a, b)$ ditulis $a * b$. Beberapa contoh operasi biner: Operasi penjumlahan dan perkalian pada bilangan (asli, bulat, rasional, dan real), matriks, bilangan modulo, dan lain-lain.

Topik pembahasan grup muncul pada beberapa bidang, yaitu: solusi persamaan linear, simetri, transformasi, dan teori koding. Dalam hal ini, grup adalah struktur aljabar dengan satu buah operasi biner.

***Definisi.* 1.2**. *Suatu himpunan tak kosong G yang disertai operasi biner $*$ adalah grup jika memenuhi syarat-syarat berikut.*

1) *Untuk setiap $a, b, dan\ c \in G$ berlaku $(a * b) * c = a * (b * c)$, disebut sifat asosiatif*
2) *Terdapat $e \in G$ sedemikian sehingga $a * e = a = e * a$, untuk setiap $a \in G$. Unsur e disebut identitas*
3) *Untuk setiap $a \in G$ terdapat $d \in G$ sedemikian sehingga $a * d = e = d * a$. Unsur d disebut invers dari a.*

Catatan:

- Keterangan bahwa $*$ adalah operasi biner di G berarti untuk setiap $a, b \in G$ berlaku $a * b \in G$. Ini disebut sifat tertutup.
- Jika pada grup G berlaku $a, b \in G$ berlaku $a * b = b * a$, maka G disebut grup Abel (grup komutatif).
- Untuk memudahkan penulisan $a * b$ cukup ditulis ab.
- Banyaknya anggota grup G disebut orde grup dan ditulis $|G|$.
- Orde grup ada yang terhingga, seperti grup yang ada pada masalah 1 sampai 5 di bawah, dan ada juga yang tak terhingga, seperti pada masalah 6 sampai 7.

Salah satu sifat penting grup adalah pada teorema berikut.

Teorema 1.3. Setiap anggota G hanya muncul satu kali pada setiap baris dan pada setiap kolom.

Bukti. Andaikan $a \in G$ muncul dua kali pada suatu baris. Maka terdapat ____ , ____ dan ____ anggota G sedemikian sehingga ________ $= a =$ ________ (Lihat tabel di bawah)

Berdasarkan sifat invers dan identitas, kalikan kedua ruas dengan _____, sehingga diperoleh (lanjutkan)

Ini berarti a hanya muncul satu kali pada setiap baris.

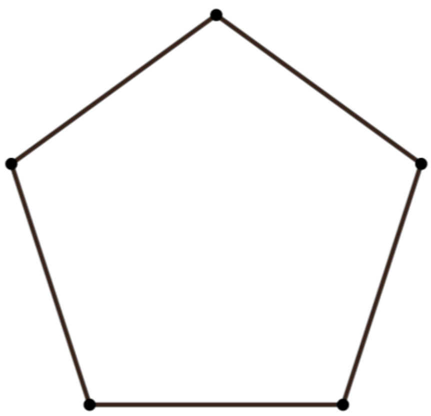
$*$	$\cdots$	b	$\cdots$	d
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
c		a		a
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$

Dengan cara serupa, silakan tulis bukti untuk bagian kedua.

Tugas Kelompok

Kerjakan soal di bawah. Satu masalah untuk satu kelompok sesuai dengan nomor.

Masalah 1. Tulis tabel operasi pada grup yang dihasilkan dari gambar berikut!



Petunjuk: Modifikasi D_4.

Masalah 2. Buktikan bahwa himpunan

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

yang disertai operasi perkalian matriks adalah grup. Catat bahwa $i = \sqrt{-1}$, sehingga $i^2 = -1$.

Petunjuk: Misalkan $e = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $a = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, …, $h = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix}$. Buat tabel operasi perkalian seperti pada **masalah 4**. Contoh hasil perkalian $ad = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix} = h$.

Masalah 3. Misalkan $K = \{x \in \mathbb{R}, x \neq 0 \text{ dan } x \neq 1\}$ dan G adalah kumpulan fungsi dari K ke K dengan rumus:

$$f(x) = \frac{1}{1-x}; g(x) = \frac{x-1}{x}; h(x) = \frac{1}{x}; i(x) = x; j(x) = 1-x; \text{dan } k(x) = \frac{x}{x-1}$$

Buktikan bahwa G merupakan grup terhadap operasi komposisi fungsi.

Masalah 4. Tulis tabel operasi pada S_3, yaitu permutasi 3 unsur.

Masalah 5. Misalkan $G = \{e, a, b, c, d, f\}$ adalah grup dan sebagian tabel operasi disajikan sebagai berikut. Lengkapilah sel yang masih kosong pada tabel tersebut!

	e	a	b	c	d	f
e	e	a	b	c	d	f
a	a	b	e	d		
b	b					
c	c	f				a
d	d					
f	f					

Petunjuk: Manfaatkan sifat asosiatif dan fakta bahwa setiap unsur G hanya muncul satu kali pada setiap baris dan kolom.

Contoh: $ba = (aa)a = a(aa) = ab = e$

Masalah 6. Buktikan bahwa $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ dengan operasi # yang didefinisikan dengan $(a, b)\#(c, d) = (ac, bc + d)$ merupakan grup.

$\mathbb{R}^*$: Himpunan bilangan real tanpa nol

Masalah 7. Buktikan bahwa $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}; a, b \in \mathbb{R} \right\}$ yang dilengkapi dengan operasi perkalian matriks adalah grup.

Masalah 8. Buktikan bahwa $G = \{r \in \mathbb{Q}: r \neq -1\}$ yang dilengkapi dengan operasi $a * b = a + b + ab$ adalah grup.

Tugas untuk semua kelompok

Misalkan $G = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ dan asumsikan G adalah grup terhadap operasi $*$ dengan aturan:

$a * b \leq a + b$, untuk setiap $a, b \in G$

$a * a = 0$, untuk setiap $a, b \in G$

Tulis tabel operasi *

LEMBAR KERJA II

Mata Kuliah : Struktur Aljabar

Dosen : Dr. Anwar Mutaqin

Semester : 4

Topik : Sifat-sifat Grup dan Orde Unsur

Pengantar. Pada lembar kerja sebelumnya hanya dibahas definisi grup dan cara membuktikan bahwa suatu himpunan merupakan grup berdasarkan definisi. Selain itu, sifat grup yang diketahui hanya ada 4 sebagaimana dalam definisi dan tambahan sifat komutatif. Banyak sifat-sifat lain yang bisa diturunkan dari definisi grup tersebut yang dapat digunakan untuk membuktikan teorema dan menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan grup. Pada bagian ini dibahas sifat-sifat grup dan orde unsur.

Sifat-Sifat Grup

Teorema 2.1. *Misalkan* $a, b, dan\ c \in G$. *Maka*

a) *Identitas di* G *tunggal*
b) *Berlaku aturan pencoretan: jika* $ab = ac$ *atau* $ba = ca$, *maka* $b = c$.
c) *Setiap elemen di* G *mempunyai invers tunggal*.

Bukti. a) Berdasarkan definisi grup, G mempunyai paling sedikit satu buah unsur identitas. Andaikan e dan e' adalah identitas di G. Maka $ee' = e' = e'e$ karena e adalah identitas. Dengan cara serupa, $ee' = e = e'e$ karena ____________________________. Jadi $e = ee' =$ _____. Ini berarti identitas di G tunggal.

b) Berdasarkan definisi grup, a mempunyai paling sedikit satu invers, yaitu d, sedemikian sehingga $ad = e = da$. Jika $ab = ac$, maka $d(ab) = d(ac)$. Berdasarkan sifat asosiatif, invers, dan identitas, maka

____

____

____

Lakukan cara yang serupa untuk bagian kedua.

c) Andaikan d dan d' merupakan invers a. Maka $ad =$ _____ $= ad'$. Dengan aturan pencoretan diperoleh _____=_______. Ini berarti invers dari a tunggal.

Catatan. Setelah terbukti bahwa invers a tunggal, maka invers dari a ditulis a^{-1}.

Akibat 2.2. *Jika G merupakan grup dan $a, b \in G$, maka*

a) $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$

b) $(a^{-1})^{-1} = a$

Bukti. a) Berdasarkan definisi grup, $ab \in G$ dan inversnya $(ab)^{-1} \in G$. Begitu juga a^{-1}dan $b^{-1} \in G$. Perhatikan bahwa

$$(ab)(b^{-1}a^{-1}) = a(bb^{-1})a^{-1} = aea^{-1} = aa^{-1} = e.$$

Dengan cara serupa diperoleh $(b^{-1}a^{-1})(ab) = e$. Ini berarti $b^{-1}a^{-1}$ adalah invers dari ab. Karena invers ab tunggal (Teorema 2.1), maka $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

b) Berdasarkan definisi grup, $a^{-1}a = e$ dan $a^{-1}(a^{-1})^{-1} =$ _____. Oleh karena itu, $a^{-1}a =$ ______. Dengan aturan pencoretan diperoleh ______________________

Seperti halnya pada himpunan bilangan, pada grup juga didefinisikan pengertian perpangkatan anggota G dengan bilangan bulat. Misalkan G adalah grup dan $a \in G$. Perpangkatan a oleh bilangan bulat positif n adalah

$$a^n = aa \cdots a \text{ (sebanyak } n \text{ kali)}$$

Untuk pangkat nol didefiniskan $a^0 = e$, sedangkan untuk bilangan negatif

$$a^{-n} = a^{-1}a^{-1} \cdots a^{-1} \text{ (sebanyak } n \text{ kali)}$$

Teorema 2.3. Misalkan G adalah grup dan $a \in G$. Maka untuk setiap $m, n \in \mathbb{Z}$ berlaku $a^{m+n} = a^m a^n$ dan $(a^m)^n = a^{mn}$.

Orde Unsur

Definisi 2.3. Misalkan G adalah grup dan $a \in G$. Orde unsur a adalah bilangan asli terkecil n sehingga $a^n = e$. Notasi $|a| = e$.

Contoh: $U_{12} = \{1,5,7,11\}$

Orde 5 adalah 2 ($|5| = 2$) karena $5^2 = 1$.

Cari orde (1 3 2)!

Jawab. $(1\ 3\ 2)^2 = (1\ 3\ 2)(1\ 3\ 2) = (1\ 2\ 3)$

$(1\ 3\ 2)^3 = (1\ 3\ 2)^2(1\ 3\ 2) = (1\ 2\ 3)(1\ 3\ 2) = (1)$

Jadi, $|(1\ 2\ 3)| = 3$

Teorema 2.4. Misalkan $\boldsymbol{G}$ adalah grup dan $a \in \boldsymbol{G}$.

a) *Jika orde a adalah tak terhingga, maka a^k berbeda untuk setiap $k \in \mathbb{Z}$.*
b) *Jika orde a adalah n, maka*

$$a^k = e \text{ jika dan hanya jika } n|k$$

dan

$$a^i = a^j \text{ jika dan hanya jika } i \equiv j \ (mod\ n)$$

c) *Jika orde a adalah n dan $n = td$ dengan $d > 0$, maka orde a^t adalah d.*

Bukti. a) Andaikan $a^i = a^j$ untuk suatu $i, j \in \mathbb{Z}$ dengan $i > j$. Kalikan kedua ruas dengan a^{-j}. Maka diperoleh $a^{i-j} = e$. Ini berarti orde a adalah terhingga karena $i - j > 0$.

b) Misal orde a adalah n dan $a^k = e$, akan buktikan $n|k$.

Berdasarkan algoritma pembagian, $k = nq + r$ dengan $0 \leq r < n$. Perhatikan bahwa $e = a^k = a^{\_\_\_\_\_\_} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_ = a^r$. Karena n adalah bilangan asli terkecil sedemikian sehingga $a^n = e$, maka $a^r = e$ hanya terjadi untuk $r = 0$, sehingga $k = nq$. Ini berarti ____________.

Misal orde a adalah n dan $n|k$, akan buktikan $a^k = e$.

Perhatikan bahwa $n|k$ berarti $k =$ ___ untuk suatu bilangan bulat t. Selanjutnya, $a^k = a^{--} =$ ______ $=$ _____ $= e$.

c) Perhatikan bahwa, $(a^t)^d = a^{td} = a^n = e$ karena $|a| = n$. Selanjutnya akan tunjukkan d adalah bilangan asli terkecil yang memenuhi $(a^t)^d = e$.

Misal ada bilangan asli k yang memenuhi $(a^t)^k = e$. Maka $a^{tk} = e$. Hal ini mengakibatkan $n|tk$ karena $|a| = n$. Oleh karena itu, $tk = nr = (td)r$ untuk suatu bilangan asli r. Akibatnya, $k = dr$, sehingga $d \leq k$ karena d dan k adalah bilangan asli. Ini berarti d adalah bilangan asli terkecil sehingga $(a^t)^d = e$. Oleh karena itu, $|a^t| = d$.

Akibat 2.5. Misalkan $\boldsymbol{G}$ adalah grup dan $a \in \boldsymbol{G}$. Jika $a^i = a^j$ dan $i \neq j$, maka orde a terhingga.

Bukti. Silakan dikerjakan sendiri!

Latihan Terbimbing

Masalah 1. Misal $a, b \in G$ dengan $|a| = 5$, $b \neq e$, dan $aba^{-1} = b^2$. Cari orde unsur b.

Langkah 1

$$(aba^{-1})^2 = (b^2)^2$$
$$(aba^{-1})(aba^{-1}) = b^4$$

Gunakan sifat-sifat grup pada ruas kiri dan lihat kembali hipotesis, yaitu $aba^{-1} = b^2$.

Langkah 2. Hasil akhir langkah 1 dikuadratkan pada kedua ruas. Lakukan hal yang serupa dengan langkah 1 sampai muncul bentuk a^5.

Masalah 2. Jika $(ab)^2 = a^2b^2$ untuk setiap $a, b \in G,$ buktikan G grup abelian.

Gunakan definisi perpangkatan

Masalah 3. Jika $(ab)^3 = a^3b^3$ dan $(ab)^5 = a^5b^5$ untuk setiap $a, b \in G$. Buktikan G grup abelian.

Akan dibuktikan $ab = ba$

Langkah 1.

$$(ab)^5 = a^5b^5$$
$$(ab)(ab)(ab)(ab)(ab) = (aaaaa)(bbbbb)$$

Berdasarkan sifat asosiatif diperoleh

$$a(ba)(ba)(ba)(ba)b = a(a^4b^4)b$$

Dengan aturan pencoretan diperoleh $(ba)^4 = (a^4b^4)$.

Langkah 2

Lakukan hal yang serupa untuk $(ab)^3 = a^3b^3$.

Gabungkan Langkah 1 dan Langkah 2.

Tugas Kelompok

Tugas 2: Hitung orde unsur semua anggota grup sesuai dengan kelompok dan cari hubungan antara orde unsur dan orde grup

Kelompok	**Grup**
1	Grup D_5 seperti pada lembar kerja sebelumnya
2	Grup G seperti pada lembar kerja sebelumnya
3	Grup K seperti pada lembar kerja sebelumnya
4	S_4, yaitu permutasi 4 unsur. $A = \{1, 2, 3, 4\}$
5	S_3 seperti pada lembar kerja sebelumnya
6	U_{30}, yaitu unit di $\mathbb{Z}_{30}$
7	Grup $G = \{e, a, b, c, d, f\}$ seperti pada lembar kerja sebelumnya
8	U_{15}, yaitu unit di $\mathbb{Z}_{15}$

LEMBAR KERJA III

Mata Kuliah : Struktur Aljabar

Dosen : Dr. Anwar Mutaqin

Semester : 4

Topik : Subgrup

Pengantar. Pada topik himpunan (set) dikenal himpunan bagian (subset). Selaras dengan hal tersebut, pada teori grup dikenal grup bagian (subgrup). Berikut definisi grup bagian.

Definisi 3.1. *Himpunan bagian (subset) H tak kosong dari grup G disebut grup bagian (subgrup) dari G jika H yang disertai dengan operasi yang sama dengan di G adalah grup*.

Contoh 1. Himpunan bilangan real positif ($\mathbb{R}^+$) adalah subgrup dari himpunan bilangan real tanpa nol ($\mathbb{R}^*$). Dalam hal ini operasi yang digunakan adalah perkalian biasa.

Contoh 2. Himpunan $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : ad - bc = 1; a, b, c, d \in \mathbb{R}\right\}$ adalah subgrup dari $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R}) = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : ad - bc \neq 0; a, b, c, d \in \mathbb{R}\right\}$ pada operasi perkalian matriks.

Contoh 3. Himpunan $H = \{3k: k \in \mathbb{Z}\}$ adalah subgrup dari $\mathbb{Z}$ pada operasi penjumlahan bilangan bulat.

Contoh 4. Himpunan $\mathrm{K} = \{r_0, r_1, r_2, r_3\}$ adalah subgrup dari D_4.

Contoh 5. Himpunan $\mathrm{M} = \{-1, 1, i, -i\}$ adalah subgrup dari grup $\mathbb{C}^*$, yaitu himpunan bilangan kompleks tanpa 0, pada operasi perkalian.

Menunjukkan bahwa suatu subset tak kosong H dari G adalah subgrup dengan definisi membutuhkan lebih banyak langkah daripada menunjukkan G adalah grup. Teorema berikut memberikan kemudahan untuk membuktikan subgrup.

Teorema 3.2. *Misalkan H adalah himpunan bagian tak kosong dari grup G. Maka H disebut subgrup dari G jika dan hanya jika berlaku:*

i. *Jika a dan $b \in H$, maka $ab \in H$,*

ii. *Jika $a \in H$, maka $a^{-1} \in H$.*

Bukti. Jika Hadalah subgrup, maka sifat i dan ii pasti terpenuhi.

Sebaliknya, misalkan sifat i dan ii terpenuhi. Maka untuk menunjukkan H adalah subgrup hanya perlu ditunjukkan bahwa $e \in H$ karena sifat asosiatif diwarisi dari G. Himpunan H tidak kosong, sehingga ada $a \in$ H. Berdasarkan ii, maka $a^{-1} \in$ H, sehingga $e = aa^{-1} \in$ H berdasarkan i. Terbukti.

Perhatikan contoh 2. Misal A dan $B \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$, maka $\det A = \det B = 1$, sehingga $\det AB = \det A \,.\det B = 1.1 = 1$. Ini berarti $AB \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$.

Invers dari $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ adalah $A^{-1} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ karena $AA^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad - bc & -ab + ab \\ cd - dc & -bc + ad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$.

Begitu juga $A^{-1}A = I$.

Teorema 3.3.

1) *Jika H dan K adalah subgrup dari grup G, maka $H \cap K$ adalah grup bagian dari G.*
2) *Misalkan H_i adalah subgrup dari grup G untuk setiap $i \in \mathbb{N}$, maka $\bigcap_i H_i$ adalah subgrup dari G.*

Bukti sebagai latihan.

Untuk subset yang terhingga, teorema berikut mempermudah cara menunjukkan bahwa suatu himpunan bagian adalah grup bagian.

Teorema 3.4. *Misalkan H adalah himpunan bagian tak kosong berorde terhingga dari grup G dan H tertutup, maka H adalah subgrup dari G.*

Bukti. Cukup ditunjukkan $a^{-1} \in H$. Misal $a \in H$, maka $a^k \in H$ untuk setiap $k \in \mathbb{N}$ berdasarkan sifat tertutup H. Karena H berorde terhingga, maka terdapat $i, j \in \mathbb{N}$ dengan $i > j$ sedemikian sehingga $a^i = a^j$. Kedua ruas dikali dengan dengan a^{-j}, maka diperoleh $a^{i-j} = e$. Ini berarti orde a adalah terhingga, misal n, karena $i - j > 0$. Ini berarti $a^n = e$. Kedua ruas dikali dengan a^{-1}, diperoleh $a^{-1} = a^{n-1}$. Jika $n > 1$, maka $n - 1 > 0$, sehingga $a^{-1} = a^{n-1} \in H$. Jika $n = 1$, maka $a^{-1} = a^0 = e \in$ H. Terbukti.

Teorema tersebut mempermudah langkah untuk menunjukkan bahwa suatu himpunan bagian adalah grup bagian. Sebagai contoh. Himpunan $H = \{f \in S_4 : f(1) = 1\}$ adalah subgrup dari S_4. Perhatikan bahwa jika $f, g \in$ H, maka $f(1) = 1$ dan $g(1)$, sehingga $fg(1) = f(g(1)) = f(1) = 1$. Ini berarti $fg \in$ H. Dengan demikian, H tertutup, sehingga H adalah subgrup dari S_4.

Cara lain menunjukkan ketertutupan suatu himpunan yang terhingga adalah dengan membuat tabel operasi (disebut Tabel Cayley). Perhatikan contoh 5! Tabel operasi pada himpunan M adalah sebagai berikut

.	**1**	$\mathbf{-1}$	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{-i}$
1	1	-1	i	$-i$
$\mathbf{-1}$	-1	1	$-i$	i
$\boldsymbol{i}$	i	$-i$	-1	1
$\boldsymbol{-i}$	$-i$	i	1	-1

Catatan: $i = \sqrt{-1}$ dan $i^2 = -1$.

Berdasarkan Tabel tersebut, himpunan M tertutup, sehingga M adalah subgrup dari $\mathbb{C}^*$.

Jika ada sebuah grup G, bagaimana cara mencari subgrup dari G? Dengan cara coba-coba akan membutuhkan waktu yang lama. Teorema-teorema berikut merupakan cara mencari subgrup dari sebuah grup.

Teorema 3.5. *Jika G adalah grup dan $a \in G$, maka $\langle a \rangle = \{a^n : n \in \mathbb{Z}\}$ adalah subgrup dari G.*

Bukti. Perhatikan bahwa $\langle a \rangle \neq \emptyset$ karena $a^0 = e \in \langle a \rangle$. Himpunan $\langle a \rangle \subseteq G$ karena $a^n \in G$ berdasarkan sifat tertutup G. Misal a^n dan a^m anggota $\langle a \rangle$, maka $a^n a^m = a^{n+m} \in \langle a \rangle$ karena $n + m \in \mathbb{Z}$. Selanjutnya, jika $a^n \in \langle a \rangle$, maka $(a^n)^{-1} = a^{-n} \in \langle a \rangle$ karena $-n \in \mathbb{Z}$. Jadi terbukti bahwa $\langle a \rangle = \{a^n : n \in \mathbb{Z}\}$ adalah subgrup dari G.

Subgrup $\langle a \rangle$ disebut subgrup siklik yang dibangun oleh a. Dalam hal ini, unsur a adalah generator. Jika ada $a \in G$ sedemikian sehingga $\langle a \rangle = G$, maka G adalah grup siklik.

Contoh. Cara mencari subgrup siklik dari $U_{18} = \{1, 5, 7, 11, 13, 17\}$ adalah sebagai berikut: $7^1 = 7$, $7^2 = 13$, $7^3 = 1$, $7^4 = 1$, $7^5 = 13$. Jadi, $\langle 7 \rangle = \{1, 7, 13\}$ adalah subgrup siklik dari U_{18}. Silakan dicoba untuk anggota U_{18} lainnya. Apakah U_{18} adalah grup siklik?

Teorema 3.6. *Misalkan G adalah grup dan $a \in G$.*

i. *Jika orde a adalah tak terhingga, maka a^k berbeda untuk setiap $k \in \mathbb{Z}$, sehingga $\langle a \rangle$ adalah subgrup tak terhingga.*
ii. *Jika orde a adalah $n \in \mathbb{N}$, maka $\langle a \rangle = \{e = a^0, a^1, a^2, \cdots, a^{n-1}\}$, yaitu subgrup yang memiliki n buah unsur.*

Teorema 3.7. *Setiap subgrup dari grup siklik adalah siklik.*

Bukti. Misal $G = \langle a \rangle$ dan H adalah subgrup dari G. Jika $H = \langle e \rangle$, maka H adalah subgrup siklik yang dibangun oleh e. Jika $H \neq \langle e \rangle$, maka H memuat anggota G yang bukan identitas, misal a^k. Karena H subgrup dari G, maka invers dari a^k, yaitu $(a^k)^{-1} = a^{-k}$ juga anggota H. Salah satu dari k atau $-k$ adalah bilangan asli, sehingga H mempunyai unsur yang merupakan perpangkatan a. Misal k adalah bilangan asli terkecil sedemikian sehingga $a^k \in H$. Akan ditunjukkan bahwa H dibangun oleh a^k. Caranya adalah dengan menunjukkan bahwa semua anggota H merupakan hasil perpangkatan a^k. Misal $x \in H$, maka $x \in G$, sehingga $x = a^m$ untuk suatu $m \in \mathbb{Z}$. Berdasarkan algoritma pembagian, maka $m = kq + r$ dengan $0 \leq r < k$ atau bisa ditulis $r = m - kq$. Akibatnya,

$$a^r = a^{m-kq} = a^m . a^{-kq} = a^m . (a^k)^{-q}.$$

Perhatikan bahwa a^m dan a^k adalah anggota H, sehingga a^r adalah anggota H berdasarkan sifat tertutup. Karena a^k adalah hasil perpangkatan a terkecil di H dan $0 \leq r < k$, maka $r = 0$. Akibatnya, $m = kq$ dan $x = a^m = a^{kq} = (a^k)^q \in \langle a^k \rangle$. Oleh karena itu, $H = \langle a^k \rangle$. Terbukti.

Contoh 6. Grup $U_{18} = \langle 5 \rangle = \{1, 5, 7, 11, 13, 17\}$ adalah grup siklik dan salah satu subgrupnya adalah $H = \{1, 7, 13\}$ (Buktikan!). Apakah H subgrup siklik? Silakan diperiksa.

Teorema 3.8. *Misal S adalah subset tak kosong dari G. Misalkan pula $\langle S \rangle$ adalah kumpulan hasil perkalian yang mungkin, dalam berbagai urutan, dari anggota S dan inversnya. Maka*

i. *Himpunan $\langle S \rangle$ adalah subgrup yang memuat S.*
ii. *Jika H adalah subgrup dari G yang memuat S, maka H memuat seluruh subgrup $\langle S \rangle$.*

Latihan Terbimbing

1. Misalkan H adalah himpunan bagian tak kosong dari grup G. Maka H disebut subgrup dari G jika dan hanya jika untuk setiap a dan $b \in H$ berlaku $ab^{-1} \in H$.

   Langkah-langkah menulis bukti.

   Bukti ke kiri. Diketahui $ab^{-1} \in H$, akan dibuktikan 1) $e \in H$, jika $a \in H$, maka $a^{-1} \in H$, dan 3). Jika $a, b \in H$, maka $ab \in H$.

   Bukti $e \in H$. Karena $H \neq \emptyset$, maka H mempunyai anggota, misal a. Gunakan hipotesis ($ab^{-1} \in H$) untuk mendapatkan $e \in H$.

   Sekarang $e \in H$. Ambil $a \in H$. Gunakan hipotesis untuk mendapatkan $a^{-1} \in H$.

   Sekarang $e \in H$ dan setiap $a \in H$ mempunyai invers di H. Ambil $a, b \in H$. Gunakan hipotesis untuk menunjukkan $ab \in H$.

   Tulis ulang buktinya dan simpulkan

2. Jika G adalah grup abelian dan n adalah bilangan asli yang ditetapkan. Maka $H = \{a \in G: a^n = e\}$ adalah subgrup.

   Bukti. Ambil a dan b anggota H. Akan dibuktikan $ab^{-1} \in H$.

   Perhatikan bahwa $(ab^{-1})^n = a^n(b^{-1})^n$ karena G merupakan grup abelian.

   Selanjutnya, $a^n(b^{-1})^n =$ ____________ $=$ ____________ $= e$ (Untuk melanjutkan, lihat materi perpangkatan pada topik sifat-sifat grup dan orde unsur)

3. Misalkan G adalah grup. Maka $Z(G) = \{a \in G: ag = ga, \text{untuk setiap } g \in G\}$ adalah subgrup. $Z(G)$ disebut center grup G.

   Bukti. Ambil a dan b anggota $Z(G)$. Akan dibuktikan $ab^{-1} \in Z(G)$ dengan cara menunjukkan $(ab^{-1})g = g(ab^{-1})$ untuk setiap $g \in G$.

Berdasarkan sifat asosiatif $(ab^{-1})g = a(b^{-1}g)$. Selanjutnya digunakan sifat $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$, maka $a(b^{-1}g) = a(\_\_\_\_\_)^{-1}$

Lanjutkan. Ingat jika $g \in G$, maka $g^{-1} \in G$ dan perhatikan syarat keanggotaan $Z(G)$.

4. Misalkan G adalah grup dan $a \in G$. Maka Centralizer a, yaitu $C(a) = \{x \in G: xa = ax\}$, adalah subgrup.

   Bukti. Ambil $x, y \in C(a)$. Akan dibuktikan $xy^{-1} \in C(a)$ dengan cara menunjukkan $(xy^{-1})a = a(xy^{-1})$.

   Modifikasi jawaban Latihan 3.

5. Jika G adalah grup abelian dan n adalah bilangan asli yang ditetapkan. Maka $H = \{a^n: a \in G\}$ adalah subgrup.

   Bukti. Ambil a^n dan b^n anggota H. Akan dibuktikan $a^n(b^n)^{-1} \in H$.

$$a^n(b^n)^{-1} = a^n(b^{-1})^n = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

   Karena $a, b \in G$, maka $ab^{-1} \in$ _____, sehingga __________ $\in H$.

Berdasarkan teorema-teorema dan latihan terbimbing tersebut, cari semua subgrup dari grup sesuai kelompok di bawah.

Kelompok	**Grup**
1	Grup D_5 seperti pada lembar kerja sebelumnya
2	Grup G seperti pada lembar kerja sebelumnya
3	Grup K seperti pada lembar kerja sebelumnya
4	S_4, yaitu permutasi 4 unsur. $A = \{1, 2, 3, 4\}$
5	S_3 seperti pada lembar kerja sebelumnya
6	U_{30}, yaitu unit di $\mathbb{Z}_{30}$
7	Grup $G = \{e, a, b, c, d, f\}$
8	U_{15}, yaitu unit di $\mathbb{Z}_{15}$

Soal-soal untuk dikerjakan secara individu.

1. Jika H dan K adalah subgrup dari G, buktikan bahwa $H \cap K$ adalah subgrup dari G.
2. Jika G_1 adalah subgrup dari G dan H_1 adalah subgrup dari H, buktikan bahwa $G_1 \times H_1$ adalah subgrup dari $G \times H$.
3. Tulis semua anggota subgrup $\langle a \rangle$ dari S_7 untuk $a = (1\ 3\ 5\ 7\ 2)$. Ingat bahwa $\langle a \rangle$ adalah subgrup siklik yang dibangun oleh a.
4. Misalkan $A(T)$ adalah grup permutasi dari himpunan T dan $\emptyset \neq T_1 \subset T$.

   a) Jika $T = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dan $T_1 = \{1, 3\}$. Tulis semua anggota H.

   b) Buktikan bahwa $H = (f \in A(T); f(t) = t,$ untuk setiap $t \in T_1)$ adalah subgrup dari $A(T)$.
5. Misalkan H adalah subgrup dari G dan untuk $x \in G$, $x^{-1}Hx = \{x^{-1}ax : a \in H\}$. Buktikan bahwa $x^{-1}Hx$ adalah subgrup dari G.

LEMBAR KERJA IV

Mata Kuliah : Struktur Aljabar

Dosen : Dr. Anwar Mutaqin

Semester : 4

Topik : Pemetaan pada Grup

Definisi 4.1. Misalkan $(G,*)$ dan $(H,\#)$ masing-masing adalah grup. Pemetaan (morfisma) $f: G \mapsto H$ disebut homomorfisma jika $f(a * b) = f(a)\#f(b)$ untuk setiap $a, b \in G$.

Selanjutnya cukup ditulis $f(ab) = f(a)f(b)$.

Beberapa istilah berkaitan dengan penamaan pemetaan pada grup

- Homomorfisma yang injektif disebut monomorfisma
- Homomorfisma yang surjektif disebut epimorfisma
- Homomorfisma yang bijektif disebut isomorfisma
- Homomorfisma dari G ke G disebut endomorfisma.

Beberapa teorema berkaitan dengan homomorfisma.

Teorema 4.2. Jika $f: G \mapsto H$ merupakan homomorfisma grup, maka

a) $f(e_G) = e_H$
b) $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$
c) $f(G)$ merupakan subgrup dari H
d) $f(a^n) = f(a)^n$, untuk setiap bilangan asli n

Bukti.

a) Berdasarkan sifat identitas dan homomorfisma, $f(e_G) = f(e_G e_G) = f(e_G)f(e_G)$. Menggunakan aturan pencoretan diperoleh $f(e_G) = e_H$.

b) Berdasarkan bagian a), sifat invers dan homomorfisma, $e_H = f(e_G) = f(aa^{-1}) = f(a)f(a^{-1})$. Kedua ruas dikali dengan $f(a)^{-1}$, diperoleh $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$

c) Ambil $x, y \in f(G)$. Maka terdapat $a, b \in G$ sedemikian sehingga $x = f(a)$ dan $y = f(b)$. Berdasarakan definisi homomorfisma dan Teorema 4.2 bagian b diperoleh $xy^{-1} = f(a)f(b)^{-1} = f(a)f(b^{-1}) = f(ab^{-1})$. Karena G adalah grup, maka $ab^{-1} \in G$, sehingga $f(ab^{-1}) = xy^{-1} \in f(G)$. Ini menunjukkan bahwa $f(G)$ adalah subgrup.

d) Berdasarkan definisi eksponen dan homomorfisma, $f(a^n) = f(aa \ldots a) = f(a)f(a) \ldots f(a) = f(a)^n$.

Latihan Terbimbing

Masalah 1. Jika $f: G \mapsto H$ merupakan homomorfisma grup yang injektif dan $a \in G$, buktikan bahwa $|f(a)| = |a|$.

Petunjuk. Misal $|a| = n$, maka $a^n = e_G$. Akibatnya $f(a^n) = f(e_G)$ (Gunakan Teorema 4.2 bagian d untuk menguraikan ruas kiri dan bagian d untuk ruas kanan)

Lanjutkan sampai diperoleh $f(a)^n = e_H$

Tunjukkan pula bahwa n adalah bilangan asli terkecil sehingga $f(a)^n = e_H$.

Kesimpulan:

Masalah 2. Jika $f: G \mapsto H$ merupakan homomorfisma grup dan K adalah subgrup dari H, buktikan bahwa $M = \{a \in G: f(a) \in K\}$ adalah subgrup dari G.

Petunjuk. Ambil $a, b \in M$. Buktikan bahwa $ab^{-1} \in M$ dengan cara menunjukkan $f(ab^{-1}) \in K$.

Mulai dari $f(ab^{-1}) =$ ____

Manfaaatkan teorema di atas.

Definisi 4.3. Dua buah grup G dan H dikatakan isomorfik (notasi $G \cong H$) jika terdapat isomorfisma $f: G \mapsto H$.

Isomorfisma dari G ke G disebut automorfisma.

Salah satu cara mengkonstruksi automorfisma adalah: Pilih $c \in G$ dan definisikan $f: G \to G$ dengan rumus $f(a) = c^{-1}ac$

Teorema 4.4. Jika $f: G \mapsto H$ merupakan monomorfisma, maka $G \cong f(G)$.

Bukti. Jelas $f: G \mapsto f(G)$ isomorfisma karena f surjektif.

Teorema 4.5. (Teorema Cayley). Setiap Grup isomorfik dengan grup permutasi

Ringkasan Bukti. Perhatikan bahwa $A(G)$ adalah himpunan semua permutasi himpunan G atau dengan notasi $A(G) = \{h: G \to G \mid h \text{ adalah bijeksi}\}$. Untuk membuktikan teorema tersebut, definsikan pemetaan $f: G \to A(G)$ yang bersifat injektif dan homomorfisma. Berdasarkan Teorema 7.14, G isomorfik dengan subgrup $Im\, f$ dari $A(G)$.

Bukti. Misalkan $a \in G$ dan definiskan pemetaan $\varphi_a: G \to G$ dengan aturan $\varphi_a(x) = ax$. Akan dibuktikan $\varphi_a \in A(G)$ dengan cara menunjukkan bahwa φ_a adalah fungsi yang injektif dan surjektif (bijeksi). Untuk itu, ambil $b, c \in G$ sedemikian sehingga $\varphi_a(b) = \varphi_a(c)$, maka didapat $ab = ac$. Dengan pencoretan a, diperoleh $b = c$. Jadi, $\varphi_a(b) = \varphi_a(c)$ mengakibatkan $b = c$. Ini berarti φ_a adalah fungsi yang injektif.

Ambil $b \in G$, pilih $x = a^{-1}b \in G$, sehingga $\varphi_a(x) = \varphi_a(a^{-1}b) = a(a^{-1}b) = b$. Jadi, setiap $b \in G$ terdapat $x \in G$ sedemikian sehingga $b = \varphi_a(x)$. Ini berarti φ_a adalah fungsi yang surjektif.

Berdasarkan kedua hal di atas, φ_a adalah bijeksi, sehingga $\varphi_a \in A(G)$.

Selanjutnya, definisikan fungsi $f: G \to A(G)$ dengan aturan $f(a) = \varphi_a$. Pemetaan f terdefinisi dengan baik karena $a = b$ mengakibatkan $f(a) = \varphi_a = \varphi_b = f(b)$. Sekarang akan dibuktikan f adalah fungsi injektif. Misal $f(a) = f(c)$, maka $\varphi_a(x) = \varphi_c(x)$ untuk setiap $x \in G$. Perhatikan bahwa $a = ae = \varphi_a(e) = \varphi_c(e) = ce = c$. Ini berarti f adalah fungsi injektif. Selanjutnya, perhatikan bahwa $f(ab) = \varphi_{ab}(x) = (ab)x = a(bx) = \varphi_a(bx) = \varphi_a(\varphi_b(x)) = \varphi_a \circ \varphi_b(x) = f(a) \circ f(b)$. Ini berarti f adalah homomorfisma.

Berdasarkan uraian di atas, $f: G \to A(G)$ adalah homomorfisma injektif. Berdasarkan Teorema 4.4 bagian, $G \cong f(G)$. Hal ini membuktikan bahwa G isomorfik dengan grup permutasi.

Latihan

Masalah 3. Apakah U_{15} isomorfik dengan U_{20}?

Gunakan **Masalah 1** untuk membuat pemetaan U_{15} dengan U_{20}

Masalah 4. Apakah U_{10} isomorfik dengan U_{12}?

Serupa dengan Masalah 2

Masalah 5. Himpunan $H = \left\{\begin{bmatrix} 1-n & -n \\ n & 1+n \end{bmatrix} : n \in \mathbb{Z}\right\}$ adalah grup terhadap operasi perkalian matriks. Buktikan bahwa $H \cong \mathbb{Z}$.

Definiskan $f: H \mapsto \mathbb{Z}$ dengan rumus $f\left(\begin{bmatrix} 1-n & -n \\ n & 1+n \end{bmatrix}\right) = n$. Tunjukkan bahwa f adalah isomorfisma.

Masalah 6. Cari grup permutasi yang isomorfik dengan grup $G = \{-i, -1, 1, i\}$. Pelajari bukti Teorema Cayley untuk menyelesaikan masalah ini.

Tugas Kelompok Topik Morfisma pada Grup

Mintalah grup yang merupakan tugas kelompok lain, dan periksa apakah grup yang menjadi tugas kelompok Anda isomorfik dengan grup kelompok lain tersebut. Khusus untuk kelompok 4, pilih satu subgrup dari S_4 yang beranggotakan 8 unsur.

Kelompok	**Grup**
1	Grup D_5 seperti pada lembar kerja sebelumnya
2	Grup G seperti pada lembar kerja sebelumnya
3	Grup K seperti pada lembar kerja sebelumnya
4	Salah satu subgrup dari S_4 yang dengan orde 8.
5	S_3 seperti pada lembar kerja sebelumnya
6	U_{30}, yaitu unit di $\mathbb{Z}_{30}$
7	Grup $G = \{e, a, b, c, d, f\}$
8	U_{15}, yaitu unit di $\mathbb{Z}_{15}$

LEMBAR KERJA V

Mata Kuliah : Struktur Aljabar

Dosen : Dr. Anwar Mutaqin

Semester : 4

Topik : Kongruensi pada Grup

Pengantar.

Konsep kongruensi bilangan bulat, yaitu mempartisi bilangan bulat menjadi n bagian, akan diperumum untuk sebarang grup. Pelajari kembali kongruensi bilangan bulat tersebut untuk mendapatkan pemahaman yang komprehensif pada materi ini.

Definisi 5.1. Misalkan K adalah subgrup dari grup G dan $a, b \in G$. Maka a kongruen dengan b pada modulo K (ditulis $a \equiv b \ (mod\, K)$ jika $ab^{-1} \in K$.

Contoh 1: Perhatikan grup $D_4 = \{r_0, r_1, r_2, r_3, h, v, d, t\}$ dan subgrup $K = \{r_0, r_1, r_2, r_3\}$. Tabel operasi D_4 ada di bawah

$\circ$	r_0	r_1	r_2	r_3	h	v	d	t
r_0	r_0	r_1	r_2	r_3	h	v	d	t
r_1	r_1	r_2	r_3	r_0	t	d	h	v
r_2	r_2	r_3	r_0	r_1	v	h	t	d
r_3	r_3	r_0	r_1	r_2	d	t	v	h
h	h	d	v	t	r_0	r_2	r_1	r_3
v	v	t	h	d	r_2	r_0	r_3	r_1
d	d	v	t	h	r_3	r_1	r_0	r_2
t	t	h	d	v	r_1	r_3	r_2	r_0

- $r_1 \equiv r_3 \ (\text{mod}\, K)$ karena $r_1 \circ r_3^{-1} = r_1 \circ r_1 = r_2 \in K$
- $h \equiv t \ (\text{mod}\, K)$ karena $h \circ t^{-1} = h \circ t = r_3 \in K$

Cari dua pasang lagi anggota D_4 yang kongruen modulo K.

Contoh 2. Misal $G = U_{21} = \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 11, 13, 16, 17, 19, 20\}$ dan $H = \{1, 8, 13, 20\}$

- $10 \equiv 17$ karena $10.17^{-1} = 10.5 = 8 \in H$.
- $19 \equiv 16$ karena $19.16^{-1} = 19.4 = 13 \in H$.
- $8 \equiv 20$ karena $8.20^{-1} = 8.20 = 13 \in H$.

Cari dua pasang lagi anggota U_{21} yang kongruen modulo H.

Tugas Kelompok: Pilih salah satu subgrup (sebut K) dari grup tugas kelompok. Cari minimal 3 pasangan anggota grup yang kongruen modulo K.

Teorema 5.2. Misal K adalah subgrup dari grup G. Maka relasi kongruensi modulo K memenuhi sifat-sifat:

a) *Refleksif: $a \equiv a \ (mod\ K)$ untuk setiap $a \in G$.*
b) *Simetris: Jika $a \equiv b \ (mod\ K)$, maka $b \equiv a \ (mod\ K)$ untuk setiap $a, b \in G$.*
c) *Transitif: Jika $a \equiv b \ (mod\ K)$ dan $b \equiv c \ (mod\ K)$, maka $a \equiv c \ (mod\ K)$, untuk setiap $a, b, c \in G$.*

Bukti.

a) $aa^{-1} =$ _____ $\in K$ karena K adalah subgrup dari G. Ini berarti _______________.
b) Berdasarkan hipotesis, $ab^{-1} \in K$. Karena K adalah subgrup dari G, maka $(ab^{-1})^{-1} \in$ ___. Perhatikan bahwa $(ab^{-1})^{-1} =$ _____ $\in$ ___. Ini berarti _________________
c) Berdasarkan hipotesis, $ab^{-1} \in K$ dan _________. Perhatikan bahwa $(ab^{-1})($_____$) \in K$ karena K adalah subgrup. Perhatikan bahwa $(ab^{-1})($_____$) =$ _________________________________. Ini berarti $ac^{-1} \in K$. Berdasrkan definisi, _________________________________.

Definisi 5.3. Misal K adalah subgrup dari grup G dan $a \in G$. Maka semua anggota G yang kongruen dengan a pada modulo K disebut koset yang dibangun oleh a dan ditulis Ka. Jadi, $Ka = \{x \in G: x \equiv a \ (mod\, K)\}$

Perhatikan bahwa $x \equiv a \ (\text{mod}\, K)$ berarti $xa^{-1} \in K$. Akibatnya, terdapat $k \in K$ sedemikian sehingga $xa^{-1} = k$ atau bisa ditulis $x = ka$. Dengan demikian,

$$Ka = \{ka: k \in K\},$$

Dalam hal ini Ka adalah koset kanan karena semua anggota K dikalikan dengan a dari kanan. Adapun koset kirinya adalah $aK = \{ak: k \in K\}$.

Harus diingat, jika operasi biner pada grup adalah +, maka koset kanan ditulis $K + a = \{k + a; a \in G\}$ dan koset kiri ditulis $a + K$. Grup terhadap operasi + umumnya komutatif, sehingga koset kiri sama dengan koset kanan.

Tugas Kelompok. Pilih subgrup sesuai Tugas 1. Untuk semua $a \in G$, cari semua anggota Ka dan semua anggota aK. Ingat G adalah grup sesuai tugas kelompok masing-masing.

Kelompok	**Grup**
1	Grup D_5 seperti pada lembar kerja sebelumnya
2	Grup G seperti pada lembar kerja sebelumnya
3	Grup K seperti pada lembar kerja sebelumnya
4	Salah satu subgrup dari S_4 yang dengan orde 8.
5	S_3 seperti pada lembar kerja sebelumnya
6	U_{30}, yaitu unit di $\mathbb{Z}_{30}$
7	Grup $G = \{e, a, b, c, d, f\}$ seperti pada lembar kerja sebelumnya
8	U_{15}, yaitu unit di $\mathbb{Z}_{15}$

Teorema 5.4. Misal K adalah subgrup dari G dan $a, b \in G$. Maka $a \equiv b \pmod{K}$ jika dan hanya jika $Ka = Kb$.

Bukti. Diketahui $a \equiv b \pmod{K}$, akan dibuktikan $Ka = Kb$ dengan menunjukkan $Ka \subseteq Kb$ dan $Kb \subseteq Ka$.

Akan ditunjukkan $Ka \subseteq Kb$. Ambil $c \in Ka$. Maka $c \equiv$ ___ $(\text{mod}\, K)$. Karena $a \equiv b \pmod{K}$, maka $c \equiv$ ___ $(\text{mod}\, K)$ berdasarkan sifat transitif. Ini berarti $c \in$ _____.

Jadi, jika $c \in Ka$, maka $c \in$ ____. Ini berarti ________________.

Dengan cara yang sama, tunjukkan $Kb \subseteq Ka$.

Akibat 5.5. Misal K adalah subgrup dari G. Maka dua buah koset dari K atau *disjoint* atau identik.

Dengan kalimat lain, jika Ka dan Kb adalah koset di G, maka atau $Ka \cap Kb = \emptyset$ atau $Ka = Kb$. Perhatikan penggunaan dua buah "atau" pada pernyataan di atas! Itu berarti hanya salah satu yang berlaku dari dua kemungkinan, *disjoint* dan identik.

Bukti. Bukti Jika Ka dan Kb disjoin, maka tidak ada yang perlu dibuktikan. Misalkan Ka dan Kb tidak disjoin. Maka $Ka \cap Kb \neq \emptyset$. Akibatnya, terdapat $x \in Ka \cap Kb$, sehingga $x \in Ka$ dan _________. Ini berarti $x \equiv$ ___$(\text{mod}\, K)$ dan $x \equiv$ ___$(\text{mod}\, K)$. Berdasarkan sifat simetris dan transitif, maka $a \equiv$ ___$(\text{mod}\, K)$. Berdasarkan Teorema 5.4, maka ____=_____. Terbukti.

Masalah 3. Misalkan K adalah subgrup dari grup G dan $a \in G$. Buktikan $Ka = K$ jika dan hanya jika $a \in K$.

Bukti ke arah kanan

Misal $Ka = K$. Maka $a \in Ka$ karena ______________. Karena $Ka = K$, maka $a \in$ ___.

Bukti ke arah kiri

Diketahui $a \in K$. Akan dibuktikan $Ka = K$ dengan cara menunjukkan $K \subseteq Ka$ dan $Ka \subseteq K$.

Ambil $a \in K$. maka jelas $a \in Ka$ karena $a \equiv a \pmod K$. Jadi, untuk setiap $a \in K$, $a \in$ _______. Ini berarti ______________…(*)

Misal $x \in Ka$. Maka $x \equiv a \pmod K$. Berdasarkan definisi kongruensi ____ $\in K$. Karena $a \in K$ dan K adalah subgrup, maka (___)$a =$ _____ $\in K$. Jadi, untuk setiap _____ $\in Ka$, maka _____ $\in K$. Ini berarti ______________ (**)

Berdasarkan (*) dan (**), maka _______________________

Masalah 2. Misal K adalah subgrup dari G dan $a \in G$. Buktikan bahwa $f: K \mapsto Ka$ dengan aturan $f(x) = xa$ adalah bijeksi.

Bukti. Ambil $x, y \in K$ sedemikian sehingga $f(x) = f(y)$. Maka $xa =$ _____. Dengan aturan pencoretan diperoleh _______________. Ini berarti f adalah fungsi yang _______________.

Ambil $ba \in Ka$. Pilih $x =$ _____ $\in K$, sehingga $f(x) = f($_____$) =$ _____ $= ba$. Ini berarti f adalah fungsi yang _____________.

Berdasarkan dua hal tersebut, maka f adalah ____________. Terbukti.

LEMBAR KERJA VI

Mata Kuliah : Struktur Aljabar

Dosen : Dr. Anwar Mutaqin

Semester : 4

Topik : Subgrup Normal

Pengantar

Pada topik sebelumnya dibahas koset. Misalkan K adalah subgrup dari G dan $a \in G$. Maka $Ka = \{ak; k \in K\}$ adalah koset kanan. Kumpulan semua koset dari G ditulis G/K. Dalam hal ini $G/K = \{Ka; a \in G\}$ untuk setiap $a \in G$. Apakah ada operasi biner pada G/K untuk mencari hasil $Ka.Kb$?

Untuk menjawab hal tersebut diperlukan sifat ini:

Jika $a \equiv b \pmod K$ dan $c \equiv d \pmod K$, maka $ac \equiv bd \pmod K$ …(#)

Sayangnya sifat tersebut tidak berlaku untuk beberapa grup non-abelian. Sebagai contoh: Misal $K = \{r_0, v\}$ adalah subgrup dari D_4. Maka $r_1 \equiv t \pmod K$ dan $r_2 \equiv h \pmod K$, silakan diperiksa, tetapi $r_3 = r_1 \circ r_2 \neq t \circ h = r_1$.

Sifat (#) dipenuhi untuk subgrup $H = \{r_0, r_1, r_2, r_3\}$.

Sebagai catatan: Pada kongruensi bilangan bulat berlaku sifat: Jika $a \equiv b \pmod n$ dan $c \equiv d \pmod n$, maka $a + c \equiv b + d \pmod n$ dan $ac \equiv bd \pmod n$ karena $\mathbb{Z}$ komutatif pada penjumlahan dan perkalian.

Subgrup K seperti apa agar sifat (#) dipenuhi?

***Definisi* 5.1.** *Sebuah subgrup N dari G disebut normal jika $Na = aN$ untuk setiap $a \in G$.*

Contoh 1. $N = \{r_0, r_1, r_2, r_3\}$ adalah subgrup normal di D_4

Bukti

$$r_1 N = \{r_1 \circ r_0, r_1 \circ r_1, r_1 \circ r_2, r_1 \circ r_3\} = \{r_1,\ r_2,\ r_3,\ r_0\}$$

$$Nr_1 = \{r_0 \circ r_1, r_1 \circ r_1, r_2 \circ r_1, r_3 \circ r_1\} = \{r_1,\ r_2,\ r_3, r_0\}$$

Jadi, $r_1N = Nr_1$.

$$tN = \{t \circ r_0, t \circ r_1, t \circ r_2, t \circ r_3\} = \{t,\ h,\ d,\ v\}$$

$$Nt = \{r_0 \circ t, r_1 \circ t, r_2 \circ t, r_3 \circ t\} = \{t,\ v,\ d,\ h\}$$

Jadi, $tN = Nt$.

Begitu juga untuk anggota D_4 lainnya.

Contoh 2. $K = \{r_0, v\}$ bukan subgrup normal di D_4.

Bukti. $tK = \{t \circ r_0, t \circ v\} = \{t,\ r_3\}$ dan $Kt = \{r_0 \circ t, v \circ t\} = \{t,\ r_1\}$. Jadi, $tK \neq Kt$.

Teorema 5.2. *Misalkan N adalah subgrup normal di G. Jika $a \equiv b\ (mod\ N)$ dan $c \equiv d\ (mod\ N)$, maka $ac \equiv bd\ (mod\ N)$.*

Bukti. Berdasarkan hipotesis, terdapat $m, n \in N$ sedemikian sehingga $ab^{-1} = m$ dan $cd^{-1} = n$. Berdasarkan sifat invers dan asosiatif diperoleh $(ac)(bd)^{-1} = (ac)(d^{-1}b^{-1}) = a(cd^{-1})b^{-1} = (an)b^{-1}$.

Unsur an adalah anggota aN. Karena N adalah subgrup normal, maka $aN = Na$. Akibatnya $an \in Na$, sehingga terdapat $l \in N$ sedemikian sehingga $an = la$. Dengan sifat asosiatif diperoleh

$$(ac)(bd)^{-1} = (an)b^{-1} = (la)b^{-1} = l(ab^{-1}) = lm \in N.$$

Jadi, $(ac)(bd)^{-1} \in N$. Ini berarti $ac \equiv bd\ (\mathrm{mod}\ N)$. Terbukti.

Teorema 5.3. *Misalkan N adalah subgrup dari G. Maka pernyataan berikut ini ekivalen:*

1) *N adalah subgrup normal di G.*
2) *Untuk setiap $a \in G$, himpunan $a^{-1}Na = \{a^{-1}na; n \in G\} \subseteq N$*
3) *Untuk setiap $a \in G$, $a^{-1}Na = N$.*

Bukti.

1) $\rightarrow$ 2). Ambil $a^{-1}na \in a^{-1}Na$. Perhatikan bahwa $na \in Na$. Karena N adalah subgrup normal, yaitu $Na = aN$, maka $na \in aN$. Akibatnya, terdapat $m \in N$

sedemikian sehingga $na = am$. Menggunakan sifat asosiatif dan invers, maka $a^{-1}na = a^{-1}(am) = m = em = m \in N$. Jadi, $a^{-1}na \in N$. Ini berarti $a^{-1}Na \subseteq N$.

2) → 3). Misalkan 2) terpenuhi untuk setiap $a \in G$. Maka 2) juga terpenuhi untuk $a^{-1} \in G$, yaitu $(a^{-1})^{-1}Na^{-1} = aNa^{-1} \subseteq N$ …(*)

Catat bahwa $aNa^{-1} = \{ana^{-1}; n \in N\}$.

Selanjutnya, ambil $n \in N$. Maka n dapat ditulis $n = a^{-1}(ana^{-1})a$. Berdasarkan (*), maka $ana^{-1} \in N$, sehingga terdapat $m \in N$ sedemikian sehingga $ana^{-1} = m$. Jadi $n = a^{-1}ma \in a^{-1}Na$. Ini berarti $N \subseteq a^{-1}Na$. Terbukti.

Bukti 3) → 1). Misal $na \in Na$. Maka $a^{-1}na \in a^{-1}Na = N$, sehingga terdapat $l \in N$ sedemikian sehingga $a^{-1}na = l$. Kedua ruas dikali a dari kiri, diperoleh $na = al \in aN$. Ini berarti $Na \subseteq aN$. …($)

Bagian 3) benar untuk setiap $a \in G$, sehingga berlaku juga untuk $a^{-1} \in G$, sehingga

$$N = (a^{-1})^{-1}Na^{-1} = aNa^{-1}.$$

Ambil $am \in aN$. Maka $ama^{-1} \in aNa^{-1} = N$. Akibatnya terdapat $r \in N$ sedemikian sehingga $ama^{-1} = r$. Kedua ruas dikalikan dengan a dari kanan, maka diperoleh $am = ra \in Na$. Ini berarti $aN \subseteq Na$. …($$)

Berdasarkan ($) dan ($$), maka $Na = aN$. Ini membuktikan bahwa N adalah subgrup normal.

Latihan Terbimbing.

Masalah 1. Buktikan bahwa $H = \left\{\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; b \in \mathbb{R}\right\}$ adalah subgrup normal di $G = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix}; a, b, d \in \mathbb{R} \text{ dan } ad \neq 0\right\}$

Langkah pengerjaan: Buktikan bahwa G adalah grup dan H adalah subgrup dari G. Anggap itu sudah dikerjakan. Selanjutnya, buktikan H subgrup normal di G.

Ambil $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix}^{-1} H \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix}$. Akan dibuktikan $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} \in H$.

Perhatikan bahwa

$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} =$ ____________________________________

Uraikan sampai diperoleh

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dan $x \in H$. Simpulkan!

Masalah 2. Misalkan $f: G \mapsto H$ adalah homomorfisma grup dan $K = \{a \in G; f(a) = e_H\}$. Buktikan bahwa K adalah subgrup normal di G.

Bukti.

Tunjukkan bahwa K tidak kosong dan $K \subseteq G$.

Tunjukkan bahwa K adalah subgrup dari G dengan cara. Ambil $a, b \in K$, buktikan $ab^{-1} \in K$ dengan menunjukkan $f(ab^{-1}) = e_H$. Manfaatkan sifat homorfisma.

Tunjukkan bahwa K normal di G dengan cara: Ambil $x^{-1}ax \in x^{-1}Kx$, dengan $x \in G$ dan $a \in K$. Buktikan bahwa $x^{-1}ax \in K$ dengan cara menunjukkan $f(x^{-1}ax) = e_H$. Manfaatkan sifat homorfisma.

Masalah 3. Jika N dan K adalah subgrup dari G. Jika N normal di G, buktikan bahwa $N \cap K$ subgrup normal di K.

Bukti.

- Tunjukkan bahwa $N \cap K$ adalah subgrup dari K dengan cara:

  Ambil $a, b \in N \cap K$, tunjukkan bahwa $ab^{-1} \in N \cap K$.

- Tunjukkan bahwa $N \cap K$ normal di K dengan cara:

  Ambil $x^{-1}ax \in x^{-1}N \cap Kx,$ dengan $x \in K$ dan $a \in N \cap K$. Tunjukkan bahwa $x^{-1}ax \in N \cap K$.

Tugas Kelompok. Cari subgrup normal (minimal 2 buah) dari grup sesuai dengan tugas kelompok.

Kelompok	**Grup**
1	Grup D_5 seperti pada lembar kerja sebelumnya
2	Grup G seperti pada lembar kerja sebelumnya
3	Grup K seperti pada lembar kerja sebelumnya
4	S_4, yaitu permutasi 4 unsur. $A = \{1, 2, 3, 4\}$
5	S_3 seperti pada lembar kerja sebelumnya
6	U_{30}, yaitu unit di $\mathbb{Z}_{30}$
7	Grup $G = \{e, a, b, c, d, f\}$ seperti pada lembar kerja sebelumnya
8	U_{15}, yaitu unit di $\mathbb{Z}_{15}$

LEMBAR KERJA VII

Mata Kuliah : Struktur Aljabar

Dosen : Dr. Anwar Mutaqin

Semester : 4

Topik : Grup Faktor dan Homomorfisma

Pengantar

Pada topik sebelumnya dibahas subgrup normal sebagai salah satu jenis subgrup yang berperan dalam grup faktor.

Definisi 7.1. Himpunan semua koset kanan N dari G dinotasikan dengan G/N, yaitu $G/N = \{Na : a \in G\}$.

Operasi pada G/N didefinisikan $(Na).(Nb) = Nab$ dengan catatan N adalah subgrup normal. Kita akan buktikan bahwa operasi tersebut terdefinisi dengan baik, artinya hasil tidak tergantung pada pemilihan anggota G sebagai representasi berbagai koset.

Teorema 7.2: Misalkan N adalah subgrup normal dari G. Jika $Na = Nb$ dan $Nc = Nd$ di G/N, maka $Nac = Nbd$.

Bukti.

$Na = Nb$ mengakibatkan $a \equiv b \pmod N$ berdasarkan Teorema 5.4. Demikian juga, $Nc = Nd$ mengakibatkan $c \equiv d \pmod N$. Oleh karena itu, $ac \equiv ad \pmod N$ berdasarkan Teorema 5.7. Ini berarti $Nac = Nbd$ menurut Teorema 5.4.

Teorema 7.3. Misal G adalah grup dan N adalah subgrup normal di G, maka G/N adalah grup. Jika G abelian, maka G/N juga abelian.

Tugas I Kelompok.

Berdasarkan grup sesuai kelompok dan subgrup normal N yang sudah diperoleh dari tugas sebelumnya, tuliskan anggota grup faktor G/N dan buat tabel operasi pada G/N.

Kelompok	Grup
1	Grup D_5 seperti pada lembar kerja sebelumnya
2	Grup G seperti pada lembar kerja sebelumnya
3	Grup K seperti pada lembar kerja sebelumnya
4	S_4, yaitu permutasi 4 unsur. $A = \{1, 2, 3, 4\}$
5	S_3 seperti pada lembar kerja sebelumnya
6	U_{30}, yaitu unit di $\mathbb{Z}_{30}$
7	Grup $G = \{e, a, b, c, d, f\}$ seperti pada lembar kerja sebelumnya
8	U_{15}, yaitu unit di $\mathbb{Z}_{15}$

***Definisi* 7.4.** *Misalkan $f: G \to H$ adalah homomorfisma grup. Maka kernel f adalah himpunan $K = \{a \in G : f(a) = e_H\}$.*

***Teorema* 7.5.** *Misalkan $f: G \to H$ adalah homomorfisma grup dengan kernel K. Maka K adalah subgrup normal di G.*

Bukti. Misal $a,\ b \in K$, maka berdasarkan sifat homomorfisma dan definisi kernel diperoleh $f(ab^{-1}) = f(a)f(b^{-1}) = f(a)f(b)^{-1} = e_H . e_H^{-1} = e_H$. Ini berarti $ab^{-1} \in K$, sehingga K adalah subgrup dari G.

Misal $a^{-1}ka \in a^{-1}Ka$ dengan $a \in G$ dan $k \in K$, maka $f(a^{-1}ka) = f(a^{-1})f(k)f(a) = f(a)^{-1}f(k)f(a) = f(a)^{-1}e_H f(a) = f(a)^{-1}f(a) = e_H$. Ini berarti $a^{-1}ka \in K$. Dengan demikian, $a^{-1}Ka \in K$. Ini berarti K adalah subgrup normal. Terbukti.

Teorema 7.6. *Misalkan $f: G \to H$ adalah homomorfisma grup dengan kernel K. Maka $K =< e_G >$ jika dan hanya jika f adalah fungsi yang injektif.*

Bukti. Misal $K =< e_G >$ dan $f(a) = f(b)$ dengan $a, b \in G$. Maka $f(a)f(b)^{-1} = e_H$. Karena f adalah homomorfisma, maka $f(a)f(b)^{-1} = f(a)f(b^{-1}) = f(ab^{-1})$, sehingga $f(ab^{-1}) = e_H$. Ini berarti $ab^{-1} \in K$. Tetapi unsur di K hanya e_G, sehingga $ab^{-1} = e_G$. Akibatnya $a = b$. Ini menunjukkan bahwa f adalah fungsi injektif.

Misal $c \in K$, maka $f(c) = e_H$. Karena f adalah homomorfisma, maka $f(e_G) = e_H$, sehingga $f(c) = f(e_G)$. Karena f adalah injektif, maka $c = e_G$. Ini berarti $K = \{e_G\}$.Terbukti.

Teorema 6.7. Jika N adalah subgrup normal dari G, maka pemetaan $\pi : G \to G/N$ dengan rumus $\pi(a) = Na$ adalah homomorfisma surjektif dengan kernel N.

Bukti. Ambil $Na \in G/N$, pilih $a \in G$, maka berlaku $Na = \pi(a)$. Ini berarti π adalah fungsi yang surjektif. Perhatikan uraian berikut. $\pi(ab) = Nab = Na.Nb = \pi(a)\pi(b)$. Ini berarti π adalah homomorfisma. Dengan demikian, π adalah homomorfisma yang surjektif. Terbukti.

Teorema 7.8. Misalkan $f: G \to H$ adalah homomorfisma surjektif grup dengan kernel K. Maka grup faktor G/K isomorfik dengan H.

Bukti.

Definisikan pemetaan $\varphi: G/K \to H$ dengan aturan $\varphi(Ka) = f(a)$. Pemetaan tersebut terdefinisi dengan baik.Misal $Ka = Kb$, maka mengakibatkan $ab^{-1} \in K$, sehingga $f(ab^{-1}) = e_H$. Padahal $f(ab^{-1}) = f(a)f(b^{-1}) = f(a)f(b)^{-1}$. Akibatnya $f(a)f(b)^{-1} = e_H$, sehingga $f(a) = f(b)$, yang berarti $\varphi(Ka) = \varphi(Kb)$.

Misal $\varphi(Ka) = \varphi(Kb)$, maka $f(a) = f(b)$, sehingga $f(a)f(b)^{-1} = e_H$. Karena f adalah homomorfisma, maka $f(a)f(b)^{-1} = f(ab^{-1}) = e_H$. Ini berarti $ab^{-1} \in K$, sehingga $Ka = Kb$. Ini menunjukkan bahwa φ adalah fungsi yang injektif.

Ambil $h \in H$, maka terdapat $a \in G$ sedemikian sehingga $h = f(a)$ karena f adalah surjektif. Kemudian pilih $Ka \in G/K$, sehingga berlaku $h = f(a) = \varphi(Ka)$. Ini berarti φ adalah surjektif.

Perhatikan, $\varphi(Ka.Kb) = \varphi(Kab) = f(ab) = f(a)f(b) = \varphi(Ka)\varphi(Kb)$. Ini berarti φ adalah homomorfisma.

Dengan demikian φ adalah isomorfisma, sehingga $G/K \cong H$. Terbukti.

Contoh 1.

Pada $\mathbb{Z}_{12}$, himpunan $K = \{0,3,6,9\}$ adalah subgrup normal. Buktikan $\mathbb{Z}_{12}/K$ isomorfik dengan $\mathbb{Z}_3$.

Bukti. Definisikan fungsi $g: \mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_3$ dengan aturan $g([a]_{12}) = [a]_3$. Maka g adalah fungsi yang surjektif karena jika $[m] \in \mathbb{Z}_3$, maka terdapat $[m] \in \mathbb{Z}_{12}$ sedemikian sehingga $[m]_3 = g([m]_{12})$. Fungsi g adalah homomorfisma karena $g([a]_{12} + [b]_{12}) = g([a+b]_{12}) = [a+b]_3 = [a]_3 + [b]_3$. Kernel f adalah K karena $f([0]_{12}) = f([3]_{12}) = f([6]_{12}) = f([9]_{12}) = [0]_3$.

Jadi, fungsi f adalah homomorfisma yang surjektif dengan kernel K. Berdasarkan Teorema Isomorfisma I, maka $\mathbb{Z}_{12}/K$ isomorfik dengan $\mathbb{Z}_3$.

Contoh 2.

Misalkan $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ dan $\mathbb{R}^+$ adalah himpunan bilangan real positif. Jika $N = \{a + bi \in \mathbb{C} : a^2 + b^2 = 1\}$, buktikan $\mathbb{C}^*/N$ isomorfik dengan $\mathbb{R}^+$.

Definisikan fungsi $f: \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}^+$ dengan rumus $f(a + bi) = a^2 + b^2$. Fungsi f terdefinisi dengan baik karena jika $a + bi = c + di$, maka $a = c$ dan $b = d$, sehingga $f(a + bi) = a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = f(c + d)$.

Misal $a+bi$ dan $c+di$ anggota $\mathbb{C}^*$. Maka

$$\begin{aligned} f\big((a+bi)(c+di)\big) &= f\big((ac-bd)+(ad+bc)i\big) \\ &= (ac-bd)^2+(ad+bc)^2 \\ &= a^2c^2-2acbd+b^2d^2+a^2d^2+2adbc+b^2c^2 \\ &= a^2(c^2+d^2)+b^2(c^2+d^2) \\ &= (a^2+b^2)(c^2+d^2) \\ &= f(a+bi)f(c+di) \end{aligned}$$

Ini berarti f adalah homomorfisma.

Misal $x \in \mathbb{R}^+$, maka terdapat $a,b \in \mathbb{R}^+$ sedemikian sehingga $x = a^2+b^2$. Pilih $z = a+bi \in \mathbb{C}^*$, sehingga berlaku $x = a^2+b^2 = f(a+bi)$. Ini berarti f adalah surjektif.

Identitas di $\mathbb{R}^+$ adalah 1 dan prapetanya adalah semua anggota N. Ini berarti N adalah kernel f.

Berdasarakan uraian di atas, fungsi f adalah homomorfisma yang surjektif dengan kernel N. Berdasarkan Teorema Isomorfisma I, maka $\mathbb{C}^*/N$ isomorfik dengan $\mathbb{R}^+$.

Teorema 7.9 (Teorema Isomorfisma II). Misalkan K dan N adalah subgrup dari G dan N normal di G. Maka $K/(N\cap K)$ isomorfik dengan $(NK)/N$.

Langkah pembuktikan.

1. Buktikan NK adalah subgrup dari G.
2. Buktikan N adalah subgrup normal di NK.
3. Buktikan pemetaan $f: K \to NK/N$ dengan rumus $f(k) = Nk$ adalah homomorfisma surjektif.
4. Buktikan $N \cap K$ adalah kernel f.
5. Simpulkan berdasarkan Teorema Isomorfisma I

Teorema 7.10 (Teorema Isomorfisma III). Misalkan K dan N adalah subgrup normal dari G dengan $N \subseteq K \subseteq G$. Maka K/N adalah subgrup normal di G/N, dan grup faktor $(G/N)/(K/N)$ isomorfik dengan G/K.

Bukti. Misal $Na, Nb \in K/N$ dengan $a, b \in K$. Maka $Na(Nb)^{-1} = Na.Nb^{-1} = Nab^{-1}$. Karena K adalah subgrup dari G, maka $ab^{-1} \in K$, sehingga $Na(Nb)^{-1} \in K/N$. Akibatnya, K/N adalah subgrup dari G/N.

Misal $Na \in K/N$ dan $Ng \in G/N$ dengan $a \in K$ dan $g \in G$. Maka $(Ng)^{-1}NaNg = Ng^{-1}NaNg \in (Ng)^{-1}(K/N)Ng$. Akan dibuktikan $(Ng)^{-1}NaNg \in N/K$. Perhatikan bahwa $Ng^{-1}NaNg = Ng^{-1}ag$. Karena $g^{-1}ag \in a^{-1}Ka$ dan K adalah subgrup normal di G, maka $g^{-1}ag \in K$. Akibatnya, $Ng^{-1}ag \in N/K$, sehingga N/K adalah subgroup normal dari G/K.

Definisikan $f: G/N \to G/K$ dengan rumus $f(Na) = Ka$. Akan dibuktikan f adalah homomorfisma surjektif.

Misal $Na = Nb$ anggota G/N, maka $ab^{-1} \in N$. Karena $N \subseteq K$, maka $ab^{-1} \in K$, sehingga $Ka = Kb$. Berdasarkan rumus fungsi, maka $f(Na) = f(Nb)$. Ini berarti f terdefinisi dengan baik.

Untuk setiap $Ka \in G/K$, pilih $Na \in G/N$ sedemikian sehingga $Ka = f(Na)$. Ini berarti f adalah surjektif.

Perhatikan bahwa $f(Na.Nb) = f(Nab) = Kab = Ka.Kb = f(Na)f(Na)$. Ini berarti f adalah homomorfisma.

Berdasarkan rumus $f(Na) = Ka$. Untuk $a \in K$, maka $Ka = Ke$ berdasarkan Teorema 7.18. Dengan demikian, $f(Na) = Ke$ untuk $a \in K$. Jadi, kernel f adalah semua koset Na untuk setiap $a \in K$. Dengan kata lain, kernel f adalah K/N.

Jadi, f adalah homomorfisma surjektif dengan kernel K/N. Berdasarkan Teorema isomorfisma 1, maka $(G/N)/(K/N)$ isomorfik dengan G/K.

Tugas 2 Kelompok

1. Cari grup yang isomorfik dengan G/N (yang diperoleh dari Tugas 1) dan buktikan dengan Teorema Isomorfisma I

Kelompok	**Grup**
1	Grup D_5 seperti pada lembar kerja sebelumnya
2	Grup G seperti pada lembar kerja sebelumnya
3	Grup K seperti pada lembar kerja sebelumnya
4	S_4, yaitu permutasi 4 unsur. $A = \{1, 2, 3, 4\}$
5	S_3 seperti pada lembar kerja sebelumnya
6	U_{30}, yaitu unit di $\mathbb{Z}_{30}$
7	Grup $G = \{e, a, b, c, d, f\}$ seperti pada lembar kerja sebelumnya
8	U_{15}, yaitu unit di $\mathbb{Z}_{15}$

2. Buktikan Teorema Isomorfisma II sesuai langkah-langkah yang sudah diberikan.